משוואות לינאריות בדו-מימד

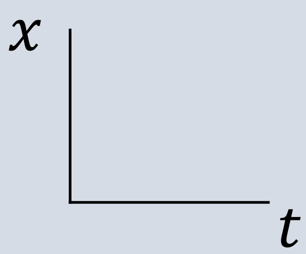
תרגיל כיתה 4

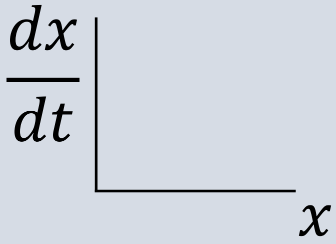
מעיין ברילר – mayanbriller@campus.technion.ac.il

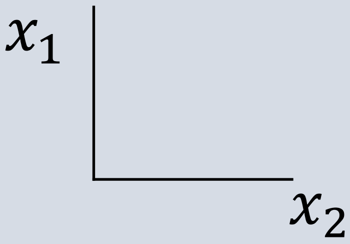
מבוא למערכות דו-מימדיות

כאשר יש לנו מערכת דו-מימדית בה יש שני משתנים:

- לכל אחד יש את נקודת השבת שלו
- כל אחד מתנהג אחרת
- הם תלויים זה בזה







מרחב הפאזה

מבוא למערכות דו-מימדיות

אפשר לייצג מערכת דו-מימדית עם מערכת משוואות:

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x_1} = ax_1 + bx_2 + B_1 \\ \dot{x_2} = cx_1 + dx_2 + B_2 \end{cases}$$

כל מערכת משוואות ניתן לייצג באמצעות מטריצה

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + B$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

המטריצה A היא תכונה של המערכת

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

לכל מטריצה ריבועית (NxN) ו-ווקטור v מתקיים:

$$Av = \lambda v$$

שימו לב זהו כפל מטריצות ולכן אי אפשר לחלק ב-v ☺

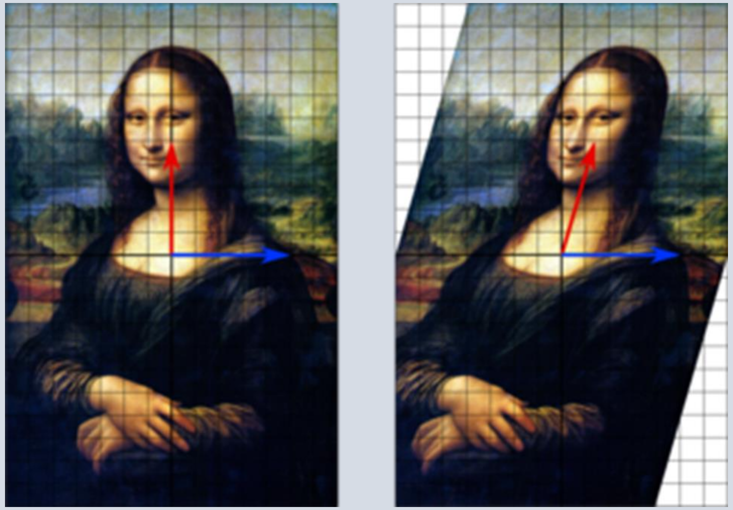
v נקרא ווקטור עצמי (eigenvector) – לכל מערכת יכולים להיות מספר ווקטורים עצמיים

λ נקרא ערך עצמי (eigenvalue) – לכל ווקטור עצמי יש ערך עצמי אחד

λ ו- v הם **תכונות של המטריצה A.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tau = a + d \\ \Delta = ad - bc \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$



פתרון מערכת לינארית דו-מימדית ללא קלט

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax \qquad \dot{x} = \begin{cases} \dot{x_1} = ax_1 + bx_2 \\ \dot{x_2} = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

$$\dot{x} = \lambda_1 \cdot c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

1. המקדמים של x_1,x_2 מצביעים על <u>יציבות</u> המערכת:

   כאשר $\lambda_1, \lambda_2<0$ המערכת יציבה, ואחרת לא.

2. נקודת השבת שלנו היא כאשר $\dot{x_1} = 0$ ו-$\dot{x_2} = 0$

   אפשר להניח שכל פעם שיש מערכת לינארית שאין בה קלט נקודת השבת היא בראשית (0,0). דרכים נוספות לראות את זה:

   1) הוקטור שמאפס את הנגזרת הוא וקטור האפס, 2) כאשר שני הערכים העצמיים שליליים, הפתרון דועך לאפס

3. המערכת דועכת/גדלה כתלות בערכים העצמיים – מכיוון שהם החזקה של האקספוננט – אבל המהירות נקבעת לפי הע"ע האיטי

פתרון מערכת לינארית דו-מימדית ללא קלט

כשאנחנו מציירים מערכת דו-מימדית במרחב הפאזה ($x_2 \sim x_1$) נצייר שני סוגי עקומים:

1. **עקומי אפס (nullclines)** בהם הנגזרת של כל אחד מהמשתנים מתאפסת <u>ואין עליהם תנועה</u> באותו המשתנה

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad x_1\ nullcline, no\ movement\ on\ x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad x_2\ nullcline, no\ movement\ on\ x_2$$

2. **וקטורים עצמיים** – עליהם המטריצה לא עושה שינוי בכיוון הכללי במרחב (מקסימום קדימה-אחורה על הקו)

$$Av = \lambda v \quad \rightarrow \quad v_1, v_2$$

בנוסף נצייר גם **כיווני תנועה במרחב** באמצעות חיצים

דוגמא משאלות ההבנה

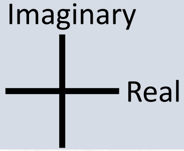
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

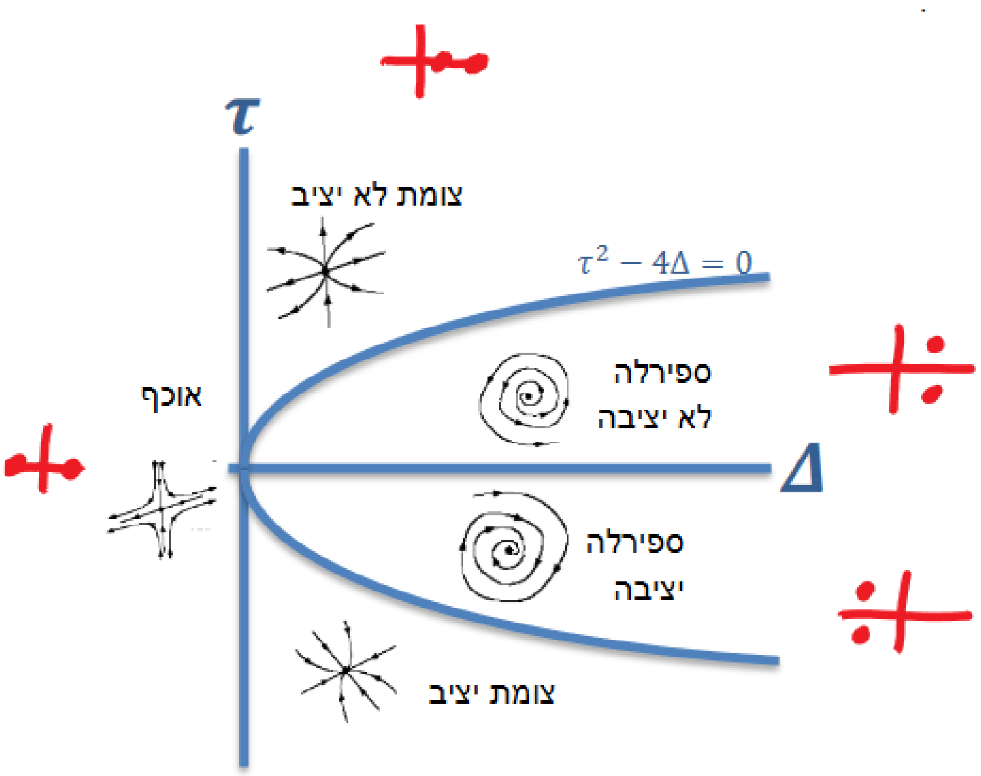
1. מהי נקודת השבת של המערכת?
2. ציירו את הוקטורים העצמיים ואת הכיוון אליו פונים עליהם
3. ציירו את עקומי האפס של המערכת
4. באיזה ציר השאיפה לנקודת השבת תהיה יותר מהירה?
5. ציירו תנועה במרחב הפאזה מנקודות התחלה שונות
6. הוכח כי על וקטור עצמי תנאי התחלה אחד מתאפס

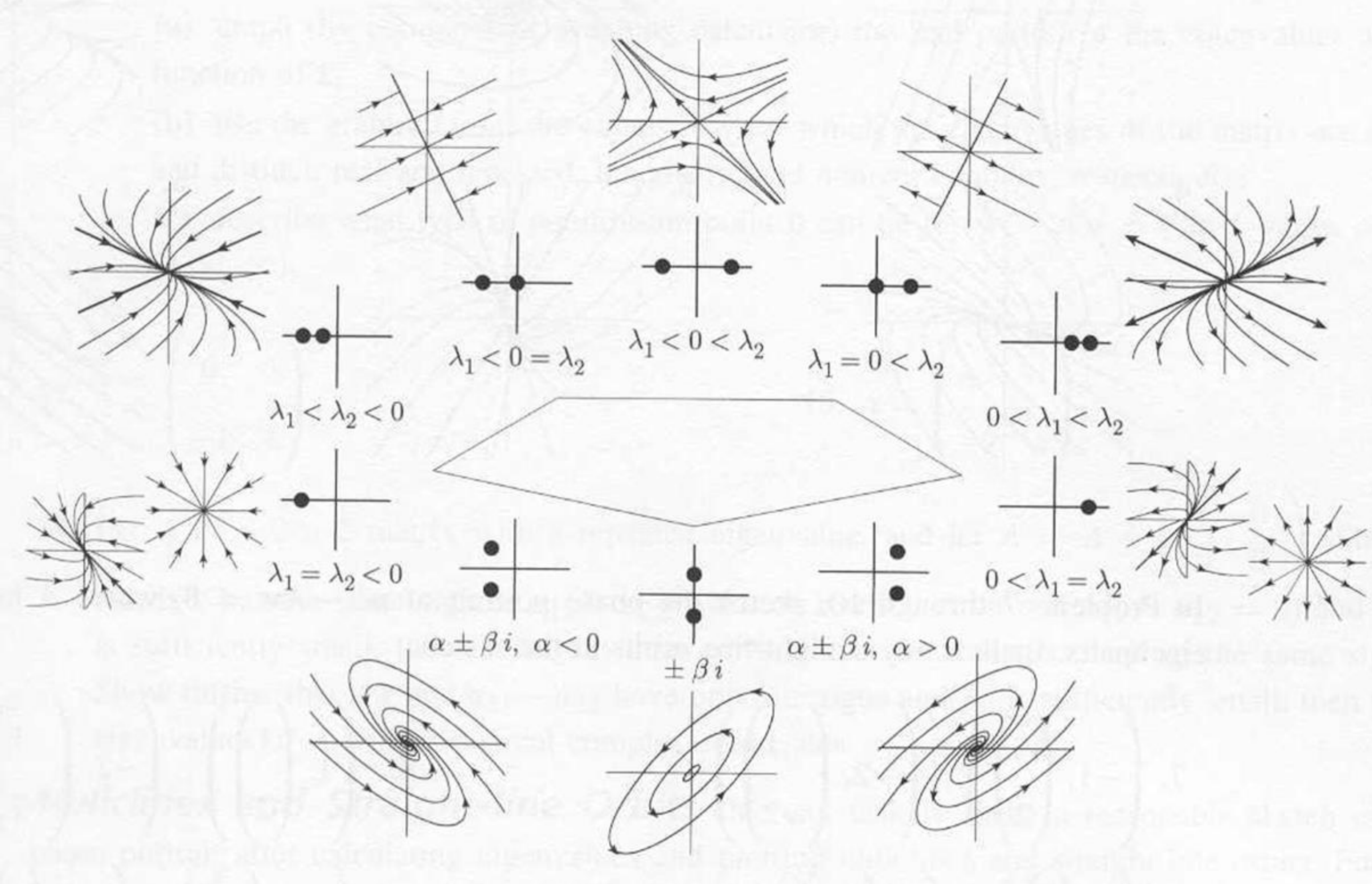
העשרה

τ, Δ מרחב

מרחב הערכים העצמיים







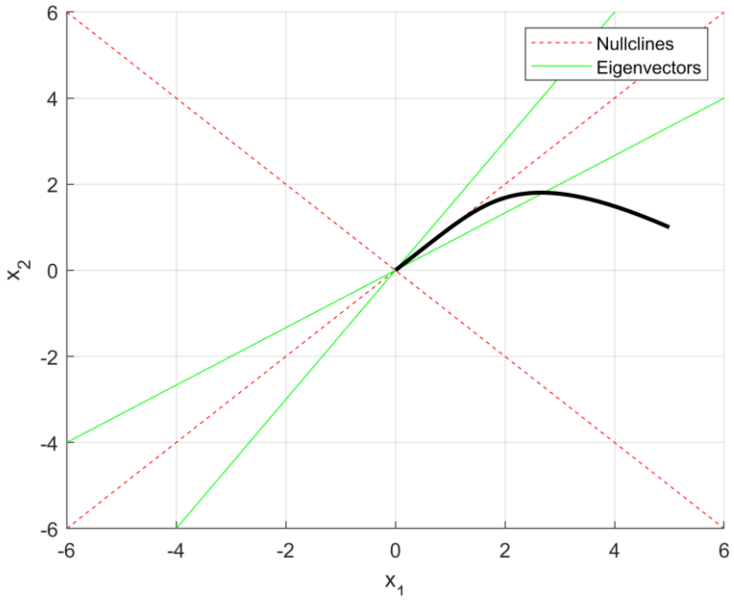
שיעורי בית

שאלה 8

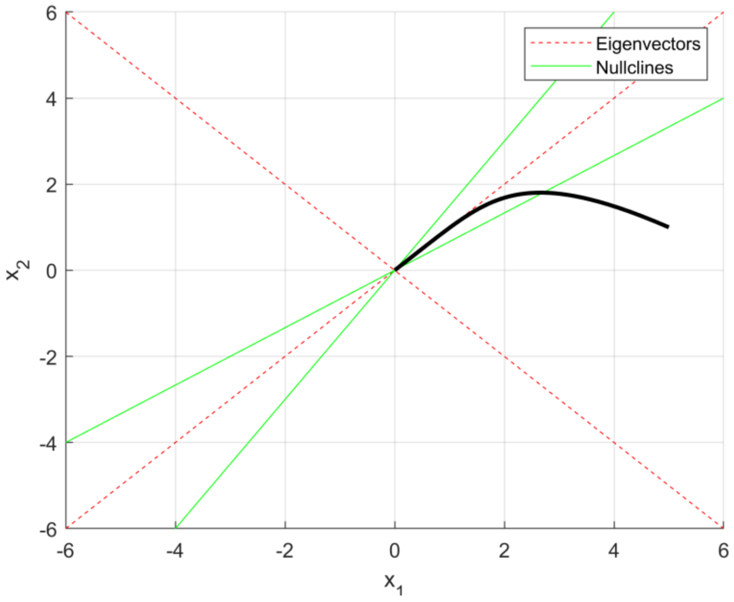
$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

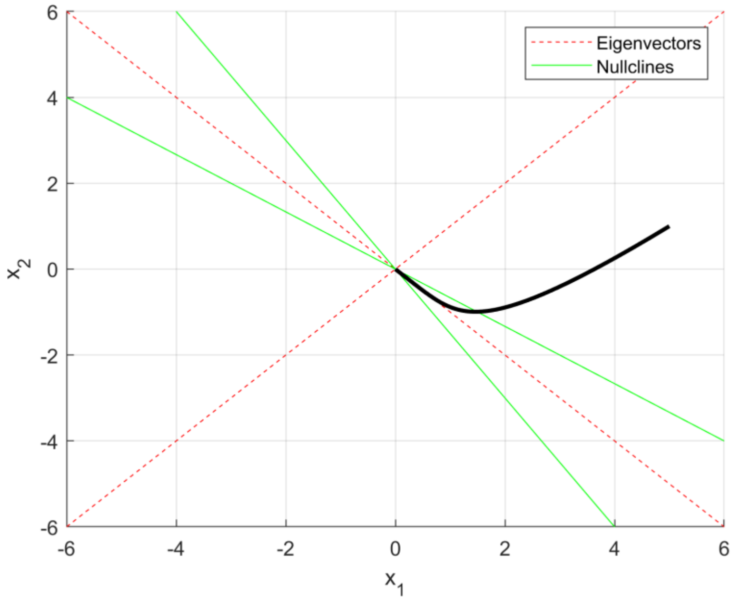
א



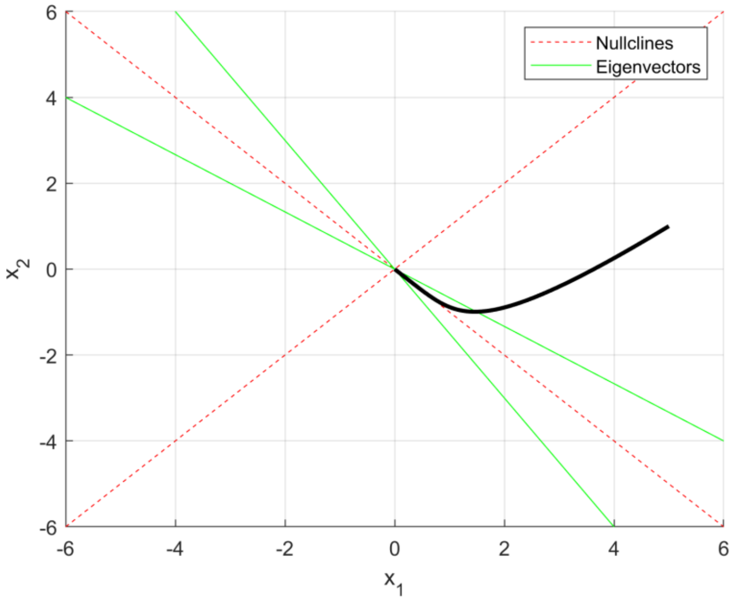
ב



ג



ד



שאלה 9

נתונה מערכת דינמית דו מימדית

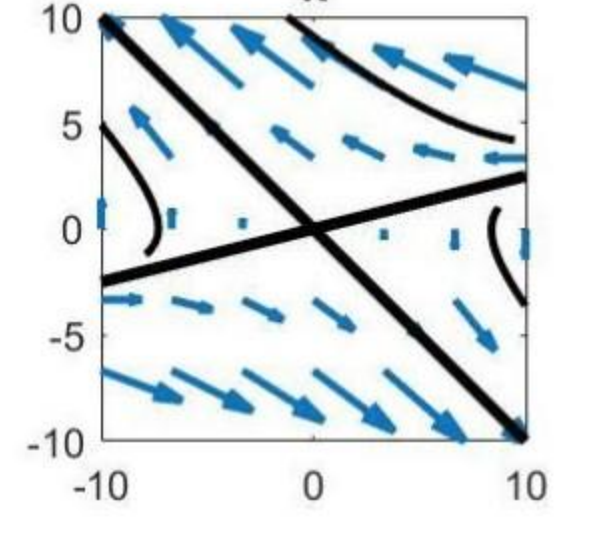
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x$$

כמו כן, ידוע כי $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה.

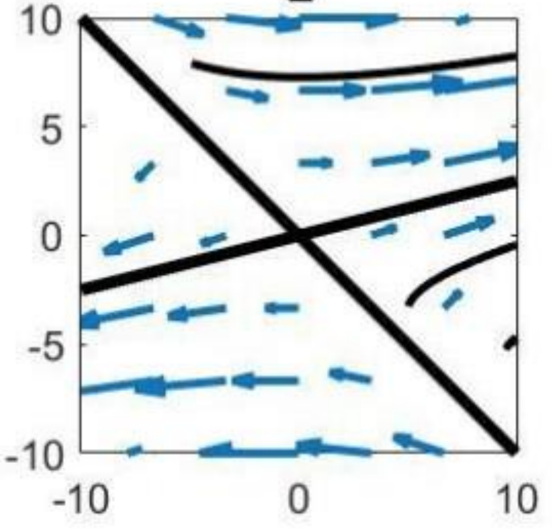
איזה מהאיורים הבאים של מסלולים במרחב הפאזה מתאר את המערכת?

(למען הסר ספק, ג – מתבדר, ד – מתכנס)

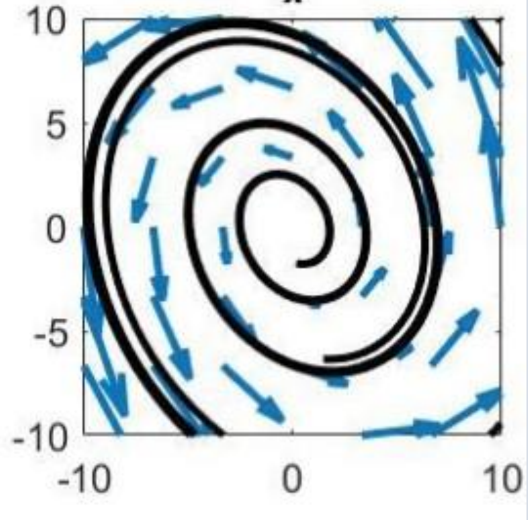
א



ב



ג



ד