

מה היה לנו עד עכשיו?

לא לינארי	לינארי	מימדים (מספר משתנים)	סדר
היום!	$\dot{x} = -qx + u$ $x(t) = x(0) \cdot e^{-qt} + \frac{u}{q}(1 - e^{-qt})$ <p>נעזרים בקונבולוציה בקלטים מסובכים</p>	מימד אחד	ראשון (\dot{x})
	$\dot{x} = A \cdot x$ $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$	שני מימדים	
	היום! (קצת)	מימד אחד	שני (\ddot{x})

בקצרה...משוואות מסדר שני

למערכות להן יש ע"ע מרוכבים יש תדירות עצמית שמאפיינת אותו. התדירות הזו שונה מהתדירות של הקלט.

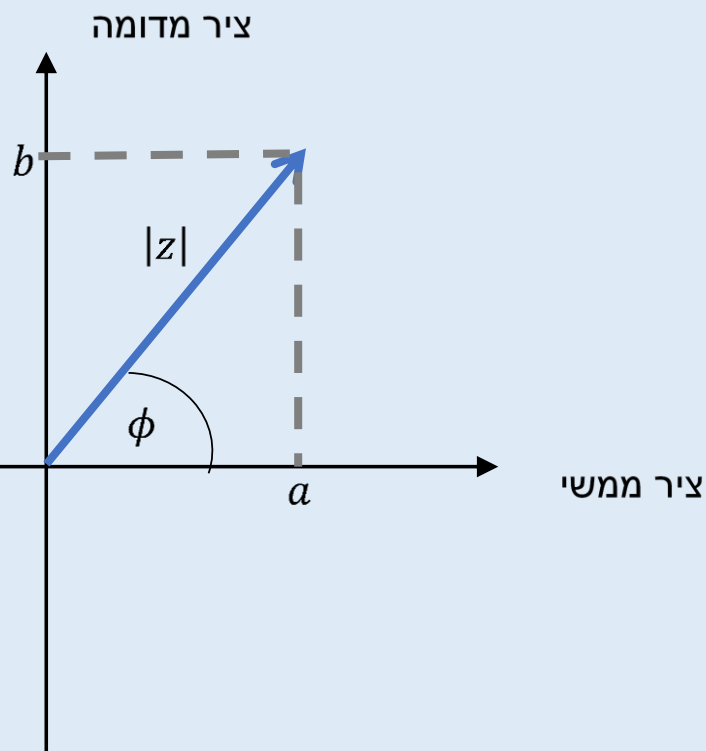
f

$\lambda = \alpha \pm i\omega$

ההבדל בין תדירות זוויתית לתדירות

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega \left[\frac{\text{radians}}{\text{second}} \right] \leftrightarrow f \left[\frac{1}{\text{second}} \right] = \text{Hz}$$



• זמן מחזור: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

• פתרון משוואת אויילר:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$$

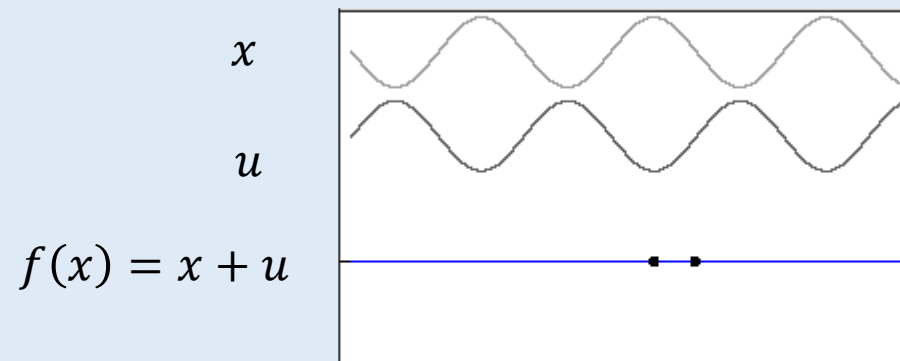
$$z = a + ib = |z| \cdot e^{i\phi}$$

תהודה

אם הקלט מחזורי הוא דוחף את המערכת בצורה היעילה ביותר כאשר התדר של הקלט קרוב לתדירות העצמית של המערכת.

תהודה – כאשר הקלט פועל בתדירות קרובה לתדירות הטבעית של המערכת

כאשר ישנה תהודה מגיעים למקסימום ההשפעה של הגלים.



לדוגמא: MRI, אולטרסאונד לפירוק אבני כליה, וכו'...

איך פותרים משוואות מסדר שני?

הופכים אותן למשוואות מסדר ראשון!

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 9x = 0$$

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = -8$$

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ -9x + 4\dot{x} \end{pmatrix}}_{Az} = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}}_z \rightarrow \begin{matrix} \tau = \\ \Delta = \end{matrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{\quad}}{2}$$

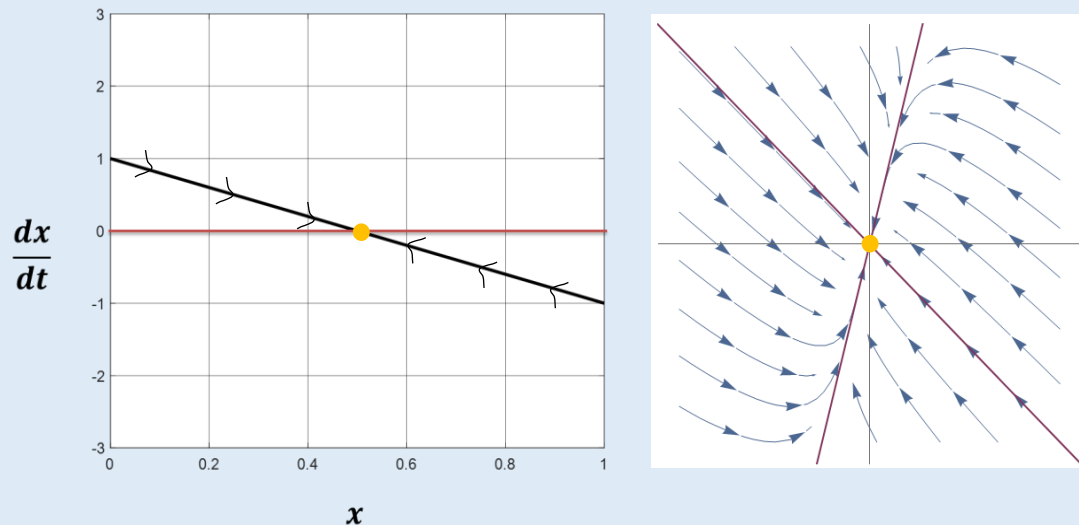
למערכת כזו ניתן גם להוסיף קלט.

הבדלים בין מערכת לינארית ללא לינארית

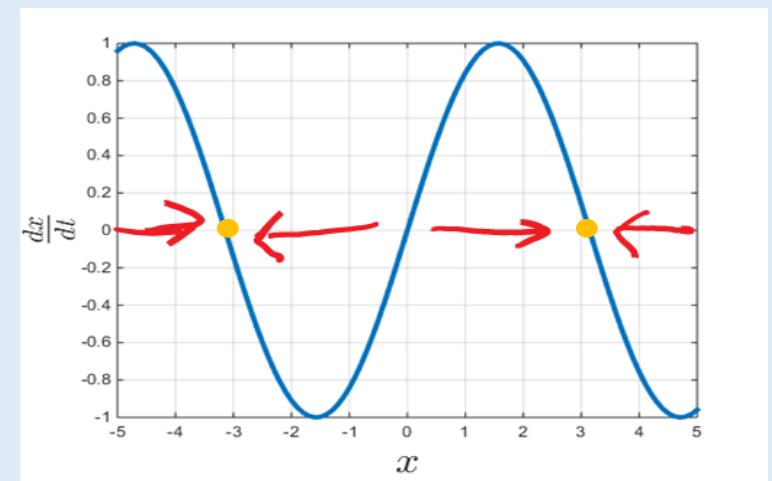
תזכורת: מערכת לינארית היא מערכת שמקיימת $f(ax + y) = af(x) + f(y)$

1. במערכת לא לינארית יכולות להיות מספר נקודות שבת
2. במערכת לינארית, ההתנהגות **אחידה בכל המרחב** (מבחינה איכותית), והיא נקבעת בכל נקודה לפי המיקום שלה ביחס לנקודת השבת (ואופי נקודת השבת).
במערכת לא לינארית ההתנהגות שונה איכותית באזורים שונים

מערכות לינאריות

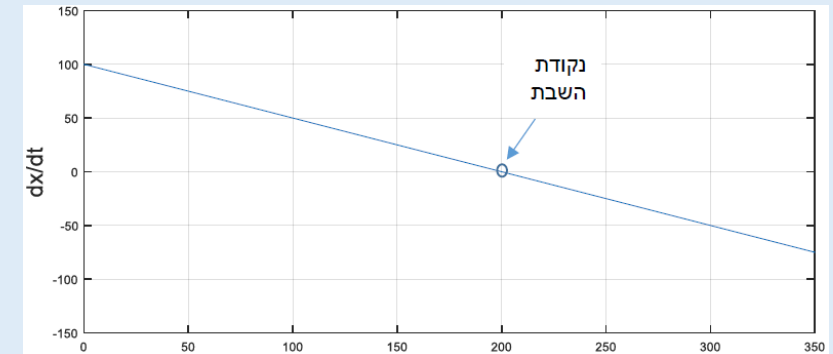


מערכות לא לינאריות



במערכות לינאריות בחד מימד....

פתרון גרפי



פתרון נומרי

t	$x(t)$	$\frac{dx}{dt}$	$\Delta t \cdot \frac{dx}{dt}$
0	0	100	$0.1 \cdot 100 = 10$
0.1	$0 + 10 = 10$	$100 - 0.5 \cdot 10 = 95$	9.5
0.2	$10 + 9.5 = 19.5$		

פתרון אנליטי

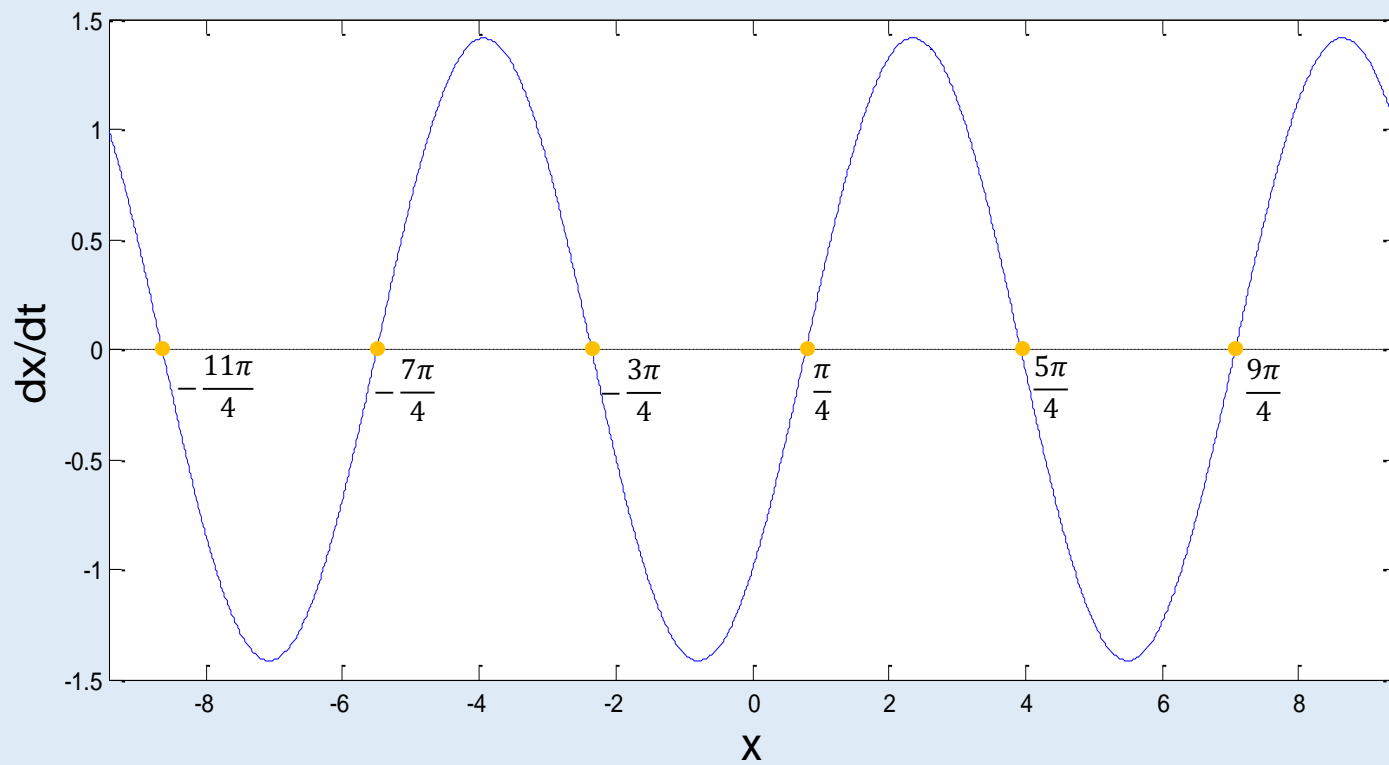
$$x(t) = x(0) \cdot e^{-qt} + \frac{u}{q} (1 - e^{-qt})$$

וגם במערכות לא לינאריות

גרפי | נומרי | אנליטי

$$\frac{dx}{dt} = \sin(x) - \cos(x) \quad \text{נתונה המערכת}$$

מי הן נקודות השבת בתחום $[-3\pi, 3\pi]$ ומהי יציבותן?



וגם במערכות לא לינאריות

גרפי | נומרי | אנליטי

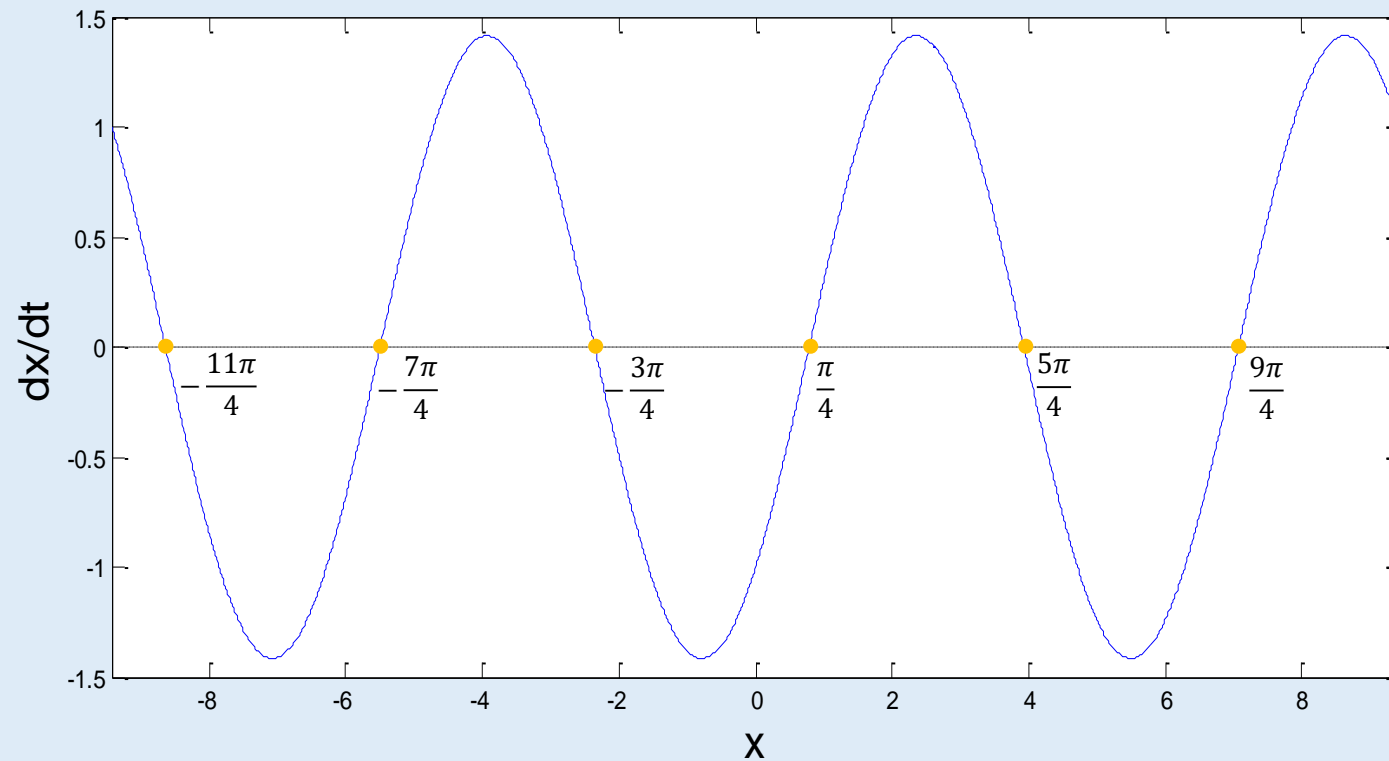
$$\frac{dx}{dt} = \sin(x) - \cos(x) \quad \text{נתונה המערכת}$$

עבור תנאי ההתחלה הנ"ל, על איזה ערך תתייב המערכת?

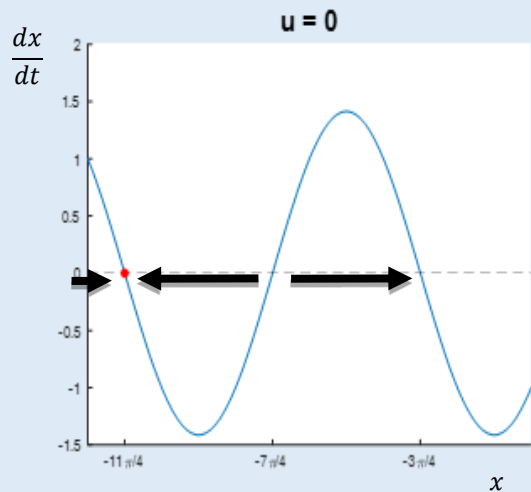
1. $x(0) = -\frac{9\pi}{4}$

2. $x(0) = 0$

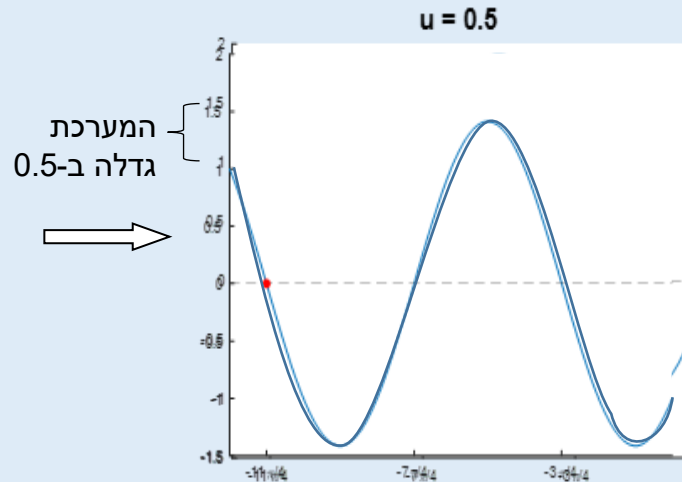
3. $x(0) = \frac{\pi}{2}$



קלטים שונים משפיעים שונה



רגע לפני תחילת הפולס

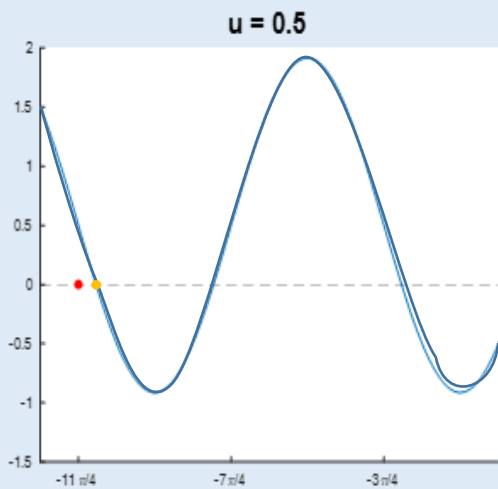


רגע אחרי תחילת הפולס

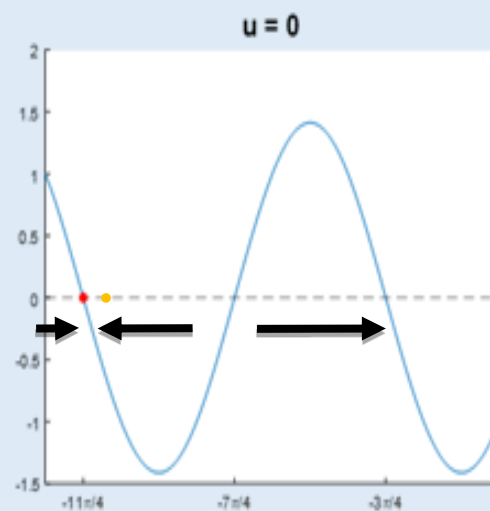
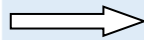
נק' השבת כמעט לא זזה

עבור $u(t = 5) = 0.5$

$$x(0) = -\frac{9\pi}{4}$$



רגע אחרי סוף הפולס



המצב הסופי של המערכת

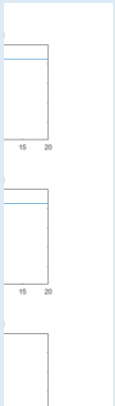
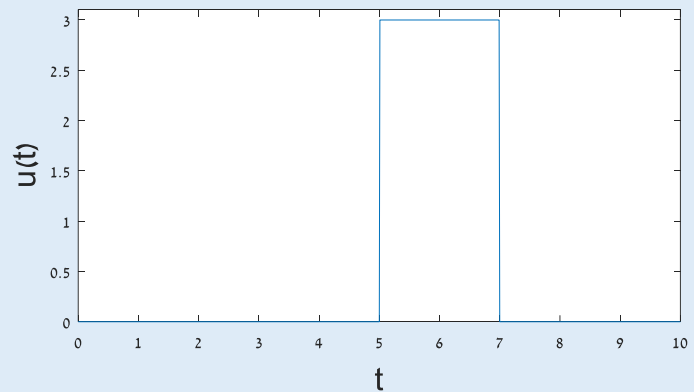
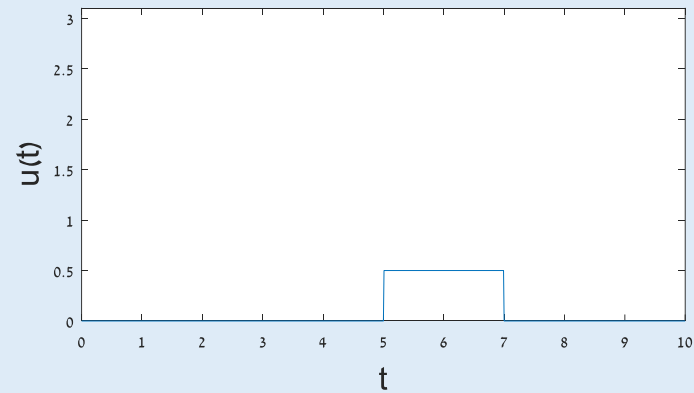
המערכת חזרה למצבה המקורי

קלטים שונים משפיעים שונה

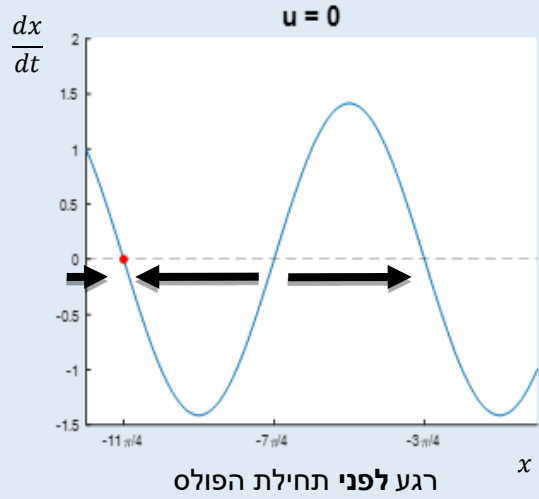
גרפי | נומרי | אנליטי

איך המערכת תגיב לקלטים הבאים?

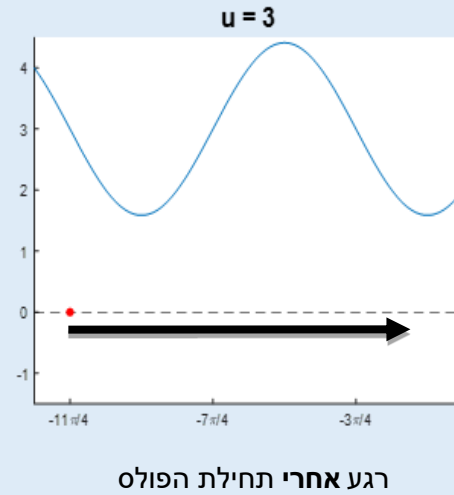
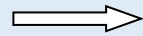
- 1. $x(0) = -\frac{9\pi}{4}$
- 2. $x(0) = 0$
- 3. $x(0) = \frac{\pi}{2}$



קלטים שונים משפיעים שונה



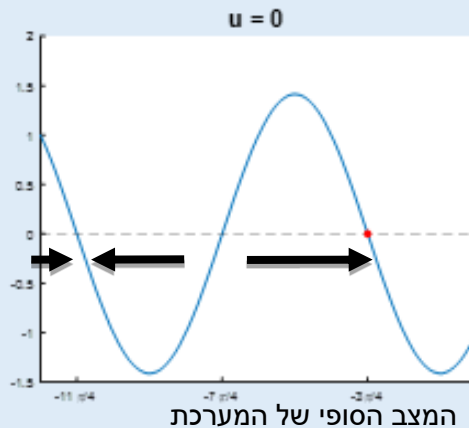
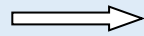
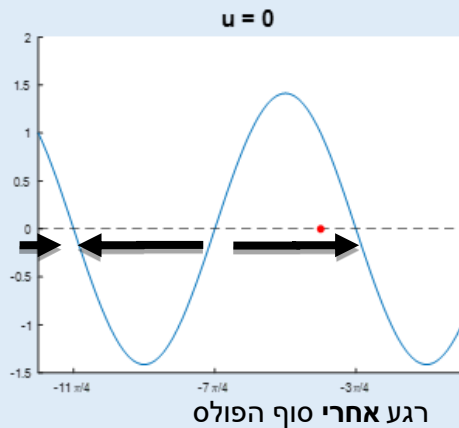
המערכת גדלה ב-3



אין נקודות שבת X הולך ועולה

$$u(t = 5) = 3 \text{ עבור}$$

$$x(0) = -\frac{9\pi}{4}$$



אגן ההתכנסות נוצר מחדש ולכן נקודת השבת השתנתה

סדר פעולות בפתרון שכולל לינאריזציה

נשתמש בלינאריזציה כדי למצוא פתרון כמותי מקורב ($x(t)$) של המערכת. הקירוב הוא לינארי בסביבת נקודת השבת.

כדי לפשט נקרא ל- \dot{x} כ- $f(x)$. על מנת למצוא פתרון מקורב בנקודה קרובה לנקודת השבת:
יצירת עקום משיק בנקודת השבת ← **מציאת שיפוע העקום** ← **נמצא את הפתרון של $x(t)$ בעזרת העקום**

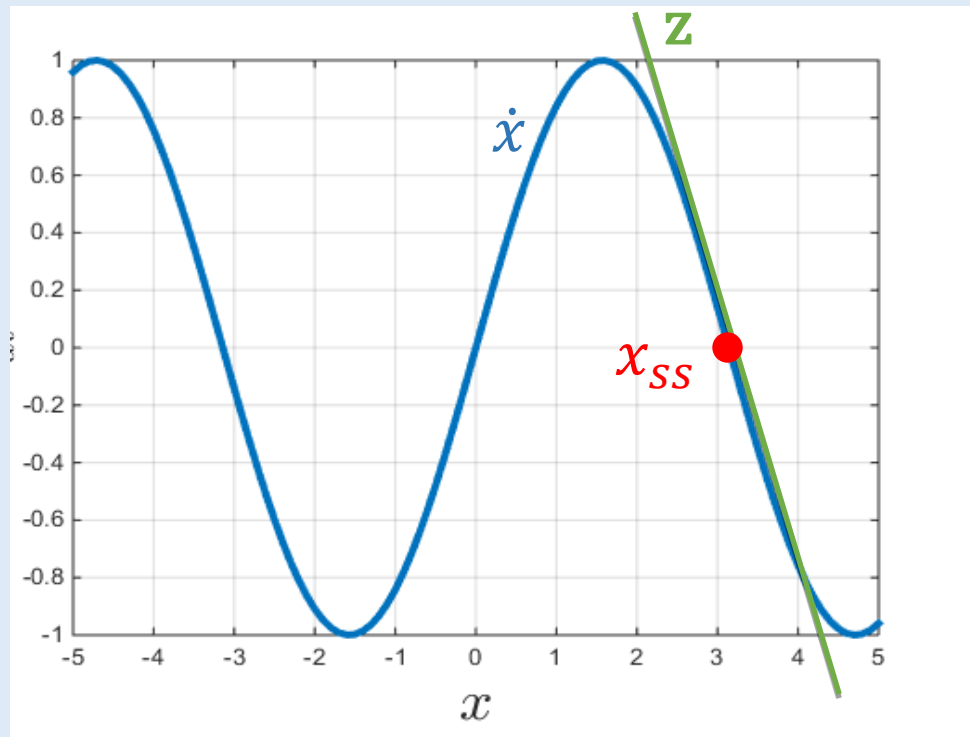
1. נסמן עקום z שמשיק ל- \dot{x} בנקודת השבת: $z = a(x - x_{SS})$ (**משוואה 1**)

2. אם נגזור את z נקבל ביטוי מהצורה $\dot{z} = a \cdot z$ כאשר a הוא שיפוע נגזרת הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_{SS} . זהו פיתוח של טור טיילור שאתם לא צריכים לדעת איך לעשות.

3. כדי למצוא את השיפוע a נגזור את הפונקציה הנתונה לנו $f(x)$ לפי x בנקודה x_{SS} - כלומר $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_{SS}}$

4. קיבלנו משוואה מהצורה $\dot{z} = -az$ ופתרונה הוא כמו שלמדנו:
 $z(t) = z(0) \cdot e^{-at}$ (**משוואה 2**).

5. נשתמש במשוואות 1 ו-2 (שתיהן $z(t)$) ובתנאי ההתחלה על מנת למצוא את מה שאנחנו צריכים.



מה עושים כשאי אפשר לעשות לינאריזציה?

מתי אי אפשר לעשות לינאריזציה?

1. כאשר אין נקודות שבת
2. כאשר נקודת השבת רחוקה מהנקודה אותה אנו מחפשים

t	$x(t)$	$\frac{dx}{dt}$	$\Delta t \cdot \frac{dx}{dt}$
0	0	100	$0.1 \cdot 100 = 10$
0.1	$0+10 = 10$	$100-0.5 \cdot 10 = 95$	9.5
0.2	$10+9.5 = 19.5$		

אז מה עושים?

• קירוב על ידי פתרון נומרי

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x(t)} \cdot \Delta t$$

- מנסים לראות האם יש רמזים בשאלה שיעזרו לנו לפתור בדרך אחרת

שיעורי בית – שאלה 5

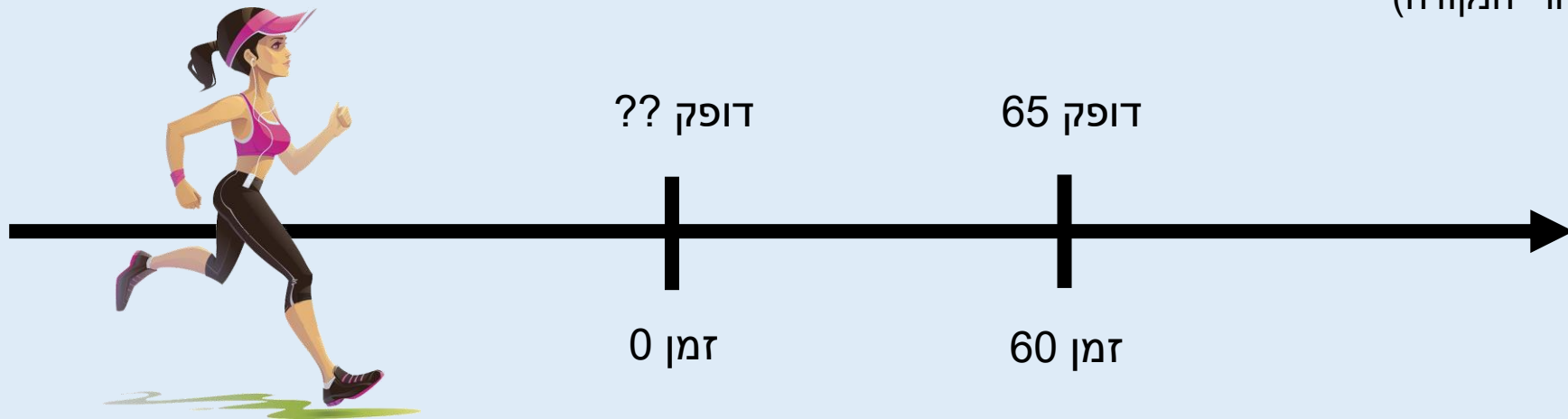
ידוע שדופק (x) אצל אדם בוגר במנוחה נשלט ע"י משוואה דפרנציאלית:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \left(\frac{x}{60}\right)^3$$

(הזמן נמדד בשניות, ואילו הדופק נמדד בפעימות לדקה).

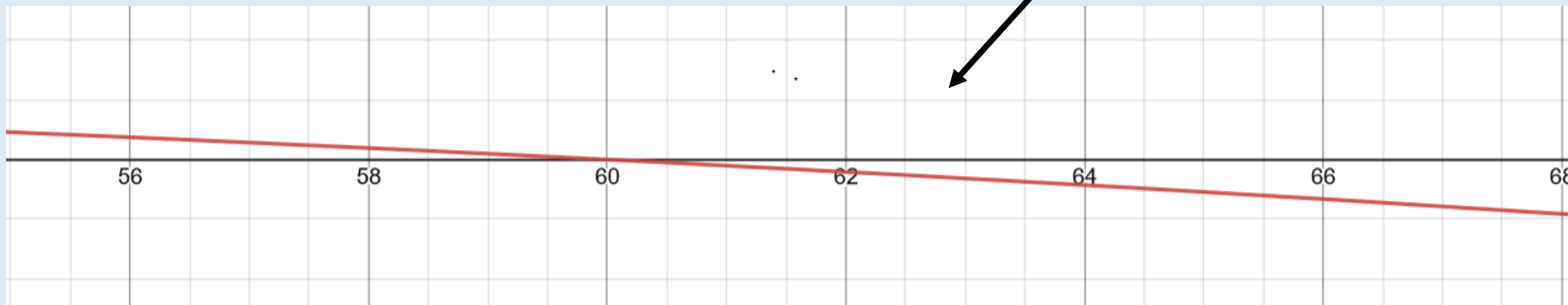
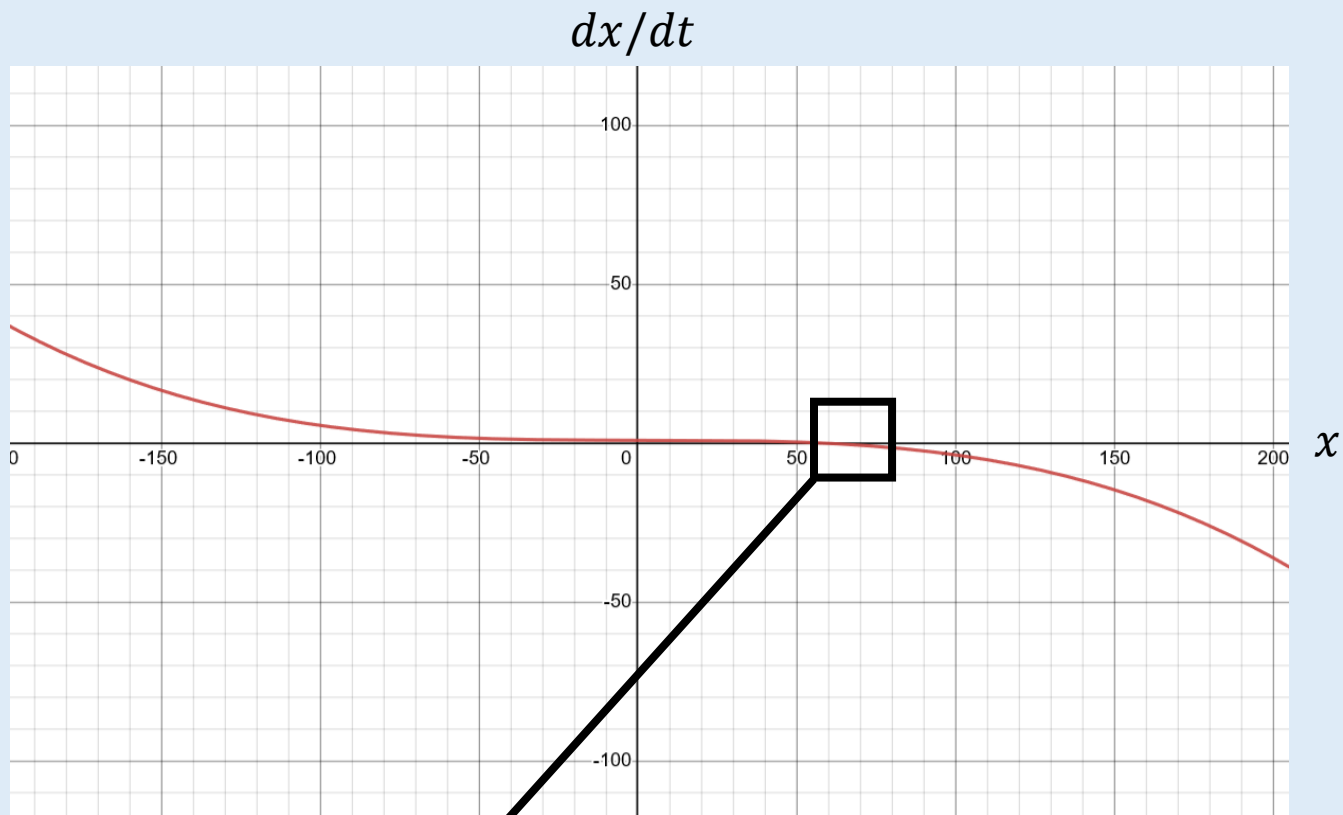
נבדקת מבצעת תרגילי כושר כאלה ואחרים שבמהלכם הדופק שלה עולה. לאחר מכן היא ממתינה 60 שניות במצב מנוחה ואז מודדים לה את הדופק. תוצאת המדידה היא 65 פעימות לדקה.

השתמשו בקירוב לניארי סביב נקודת שיווי משקל של המערכת, והעריכו את הדופק של הנבדקת מיד בתום תרגילי הכושר. (נא לדייק עד ספרה אחת אחרי הנקודה)



קירוב לינארי בסביבת נקודת השבת

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \left(\frac{x}{60}\right)^3$$



יצירת עקום משיק בנקודת השבת ←

[← מציאת שיפוע העקום](#)

← נמצא את הפתרון של $x(t)$ בעזרת העקום

דופק 65 דופק ??



זמן 0

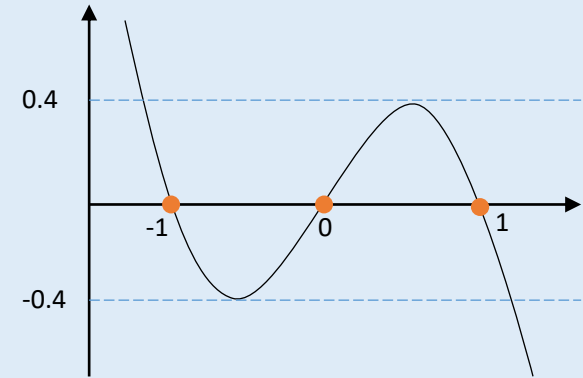
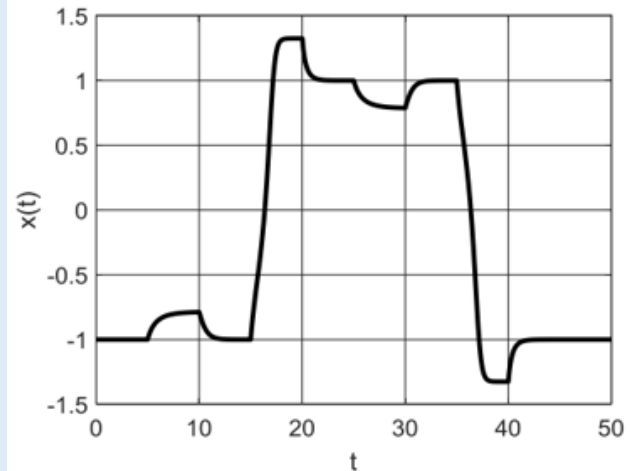
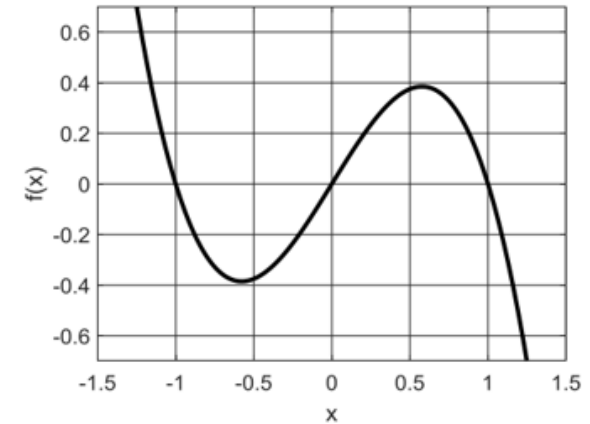
זמן 60

שאלה 8

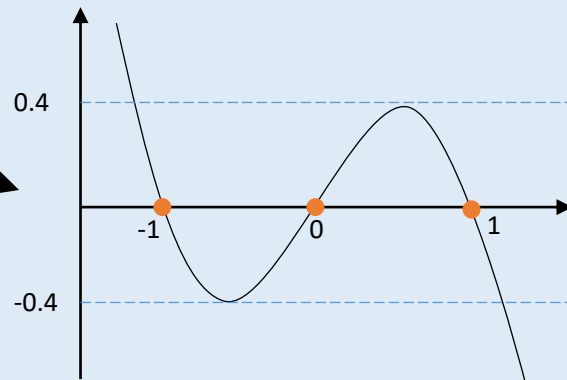
נתונה המערכת הבאה:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + u(t)$$

כאשר $f(x)$ ו $x(t)$ נתונים בגרפים הבאים:



קלט שלילי
גדול שמוציא
מאגן הניקוז



קלט חיובי
גדול שמוציא
מאגן הניקוז

