מה היה לנו עד עכשיו?

סדר	מימדים (מספר משתנים)	לינארי	לא לינארי
ראשון ($\dot{x}$)	אחד	$\dot{x} = -qx + u$ $x(t) = x(0) \cdot e^{-qt} + \frac{u}{q}(1 - e^{-qt})$ נעזרים בקונבולוציה בקלטים מסובכים	• מספר נקודות שבת • קלט יכול להוציא אותנו מאגני ניקוז • התנהגות שונה במיקומים שונים בדיאגרמת הפאזות • מציאת פתרון יכולה להעשות בעזרת לינאריזציה או פתרון נומרי
	שניים	$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + B$ $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ $\dot{x} = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ $\lambda = \alpha \pm i\omega,\ T = \frac{2\pi}{\omega},$ $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$ נעזרנו בעקומי אפס ($\frac{dx}{dt} = 0$) ווקטורים עצמיים על מנת לצייר את המסלול	**היום!**

מערכות דו מימדיות לא לינאריות

במערכת <u>דו-מימדית</u> יש לנו <u>שני</u> משתנים (x_1,x_2 או x,y)

המערכות יהיו בד"כ מהצורה של נגזרת:

למשל $$f(x,y)=\begin{cases} f_1(x,y)=\frac{dx}{dt} \\ f_2(x,y)=\frac{dy}{dt}\end{cases}$$ או $$\begin{cases} f(x_1,x_2)=\frac{dx_1}{dt} \\ g(x_2,x_2)=\frac{dx_2}{dt}\end{cases}$$

מכיוון שאנו מתחילים במערכות לא לינאריות, נשתמש שוב ב**<u>לינאריזציה</u>**.

אבל איך עושים את זה במערכת דו-מימדית?

<u>יעקוביאן</u>

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{dx} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{dx} & \frac{\partial g}{dy}\end{pmatrix}$$

מערכות דו מימדיות לא לינאריות

דרכים לפתרון בעיות:

1. לינאריזציה סביב נקודות השבת (בשני מימדים) – נעשית בעזרת מציאת ה**יעקוביאן** וחישובו בנקודת השבת
2. עקומי אפס ווקטורים עצמיים
3. כיווני זרימה

דגשים:

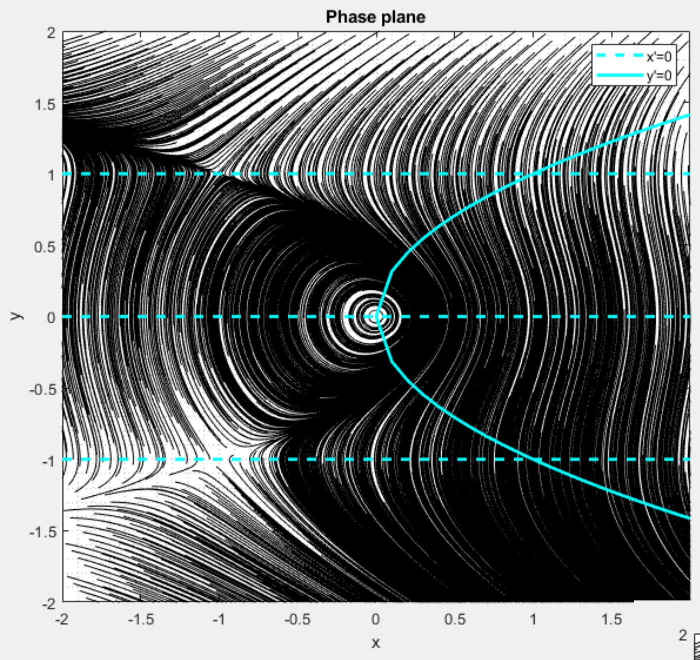
1. נקודות שבת נמצאות בנקודות המפגש של עקומי האפס – אבל לא תמיד זה מספיק להראות את זה גרפית – לפעמים צריך לפתור.
2. כל פעם שחוצים עקום אפס הכיוון מתהפך
3. על עקומי האפס החצייה היא רק בכיוון אחד (עבור $\dot{x}_1 = 0$ – למעלה ולמטה, עבור $\dot{x}_2 = 0$ – ימינה ושמאלה)
4. בנקודות השבת הכיוון מתהפך (למשל: אם באזור ליד נקודת השבת יש ירידה ימינה, אחריה תהיה עליה שמאלה)
5. הצבת נקודת שבת ביעקוביאן נותנת לנו את הערכים העצמיים בנקודה, ומכאן גם את יציבותה

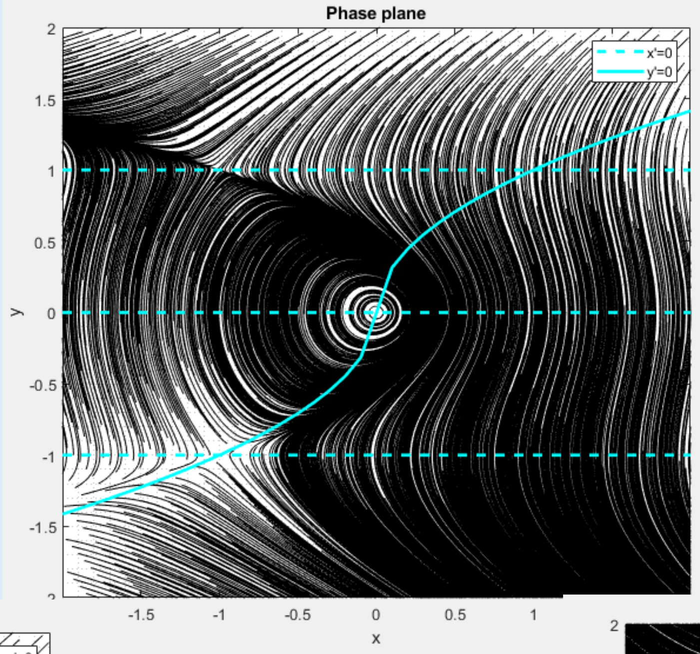
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{dx} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{dx} & \frac{\partial g}{dx} \end{pmatrix}$$

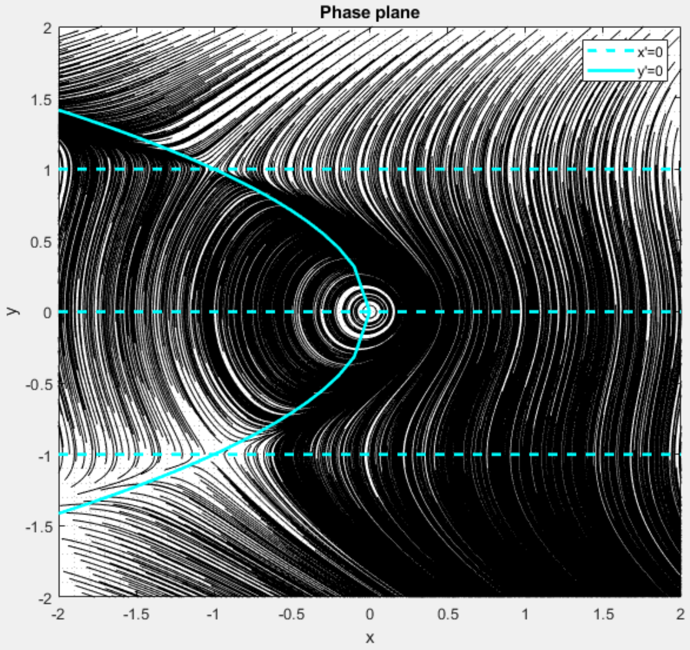
שאלה 1

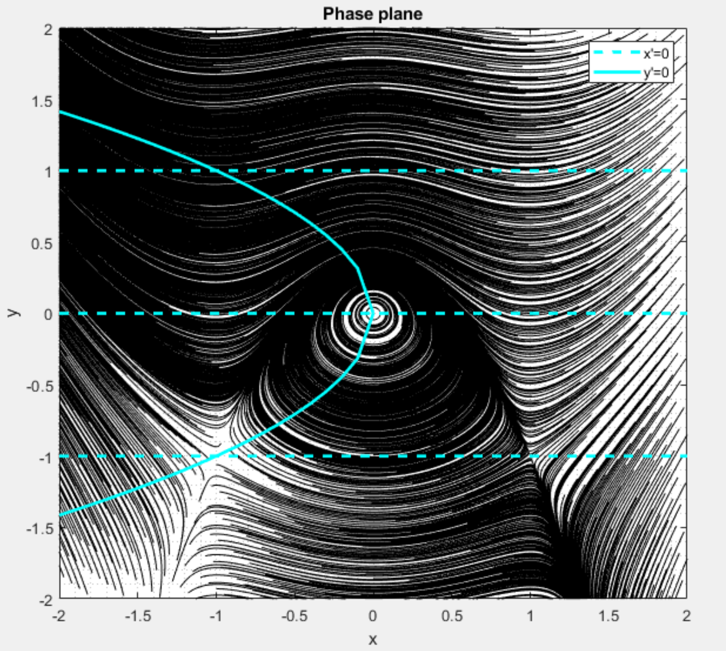
$$\dot{x} = y - y^3$$
$$\dot{y} = -x - y^2$$

לפי הנלמד בהרצאות, איזה שרטוט במרחב הפאזה מתאים לפתרון המערכת (שימו לב לעקומי האפס)









שאלה 1

1. מהן נקודות השבת? מה יציבותן?
2. מהם עקומי האפס?
3. מה כיווני הזרימה שנצפה להם?

$$\dot{x} = y - y^3$$

$$\dot{y} = -x - y^2$$

שאלה 2

נתונה המערכת הדינמית הבאה:

$$\dot{x} = f(x,y) = x \cdot (-x - y + 3)$$
$$\dot{y} = g(x,y) = y \cdot (-4y - 2x + 8)$$

1. כמה נקודות מתאימות להגדרת נקודות שבת?
2. מהו סכום ערכי ה-y של נקודות אלו?
3. כמה נקודות שבת יש מכל סוג?
4. מהו כיוון התנועה ההתחלתי של מסלול אשר מתחיל בנקודה $(1,1)$?

שאלה 2

3. כמה נקודות שבת יש מכל סוג?
4. מהו כיוון התנועה ההתחלתי של מסלול אשר מתחיל בנקודה $(1,1)$?

נקודות שבת

$(2,1)$ $(3,0)$ $(0,2)$ $(0,0)$

עקומי אפס

$\dot{x} \rightarrow x = 0, \quad x = 3 - y$

$\dot{y} \rightarrow y = 0, \quad x = 4 - 2y$

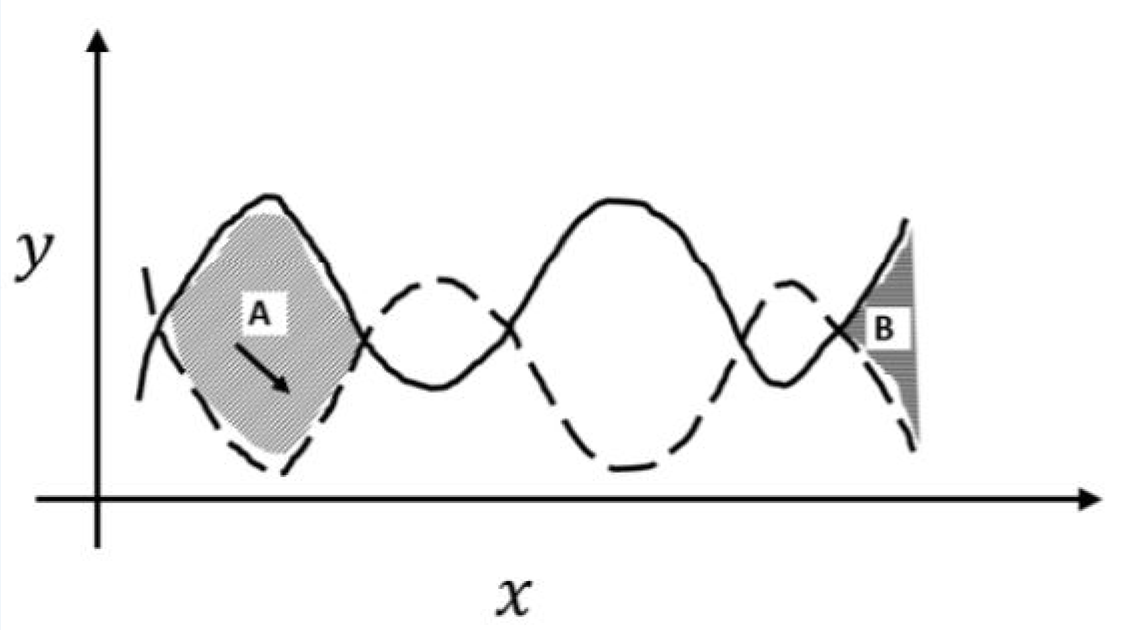
שאלה 6

$$\frac{dx}{dt} = a_1 y - a_2 \sin x - a_3$$
$$\frac{dy}{dt} = b_1 y - b_2 \sin x - b_3$$

באיור שלפניכם מוצג מרחב הפאזה של מערכת דינמית דו מימדית.
כאשר a1, a2, a3, b1, b2, b3 הם קבועים כלשהם.

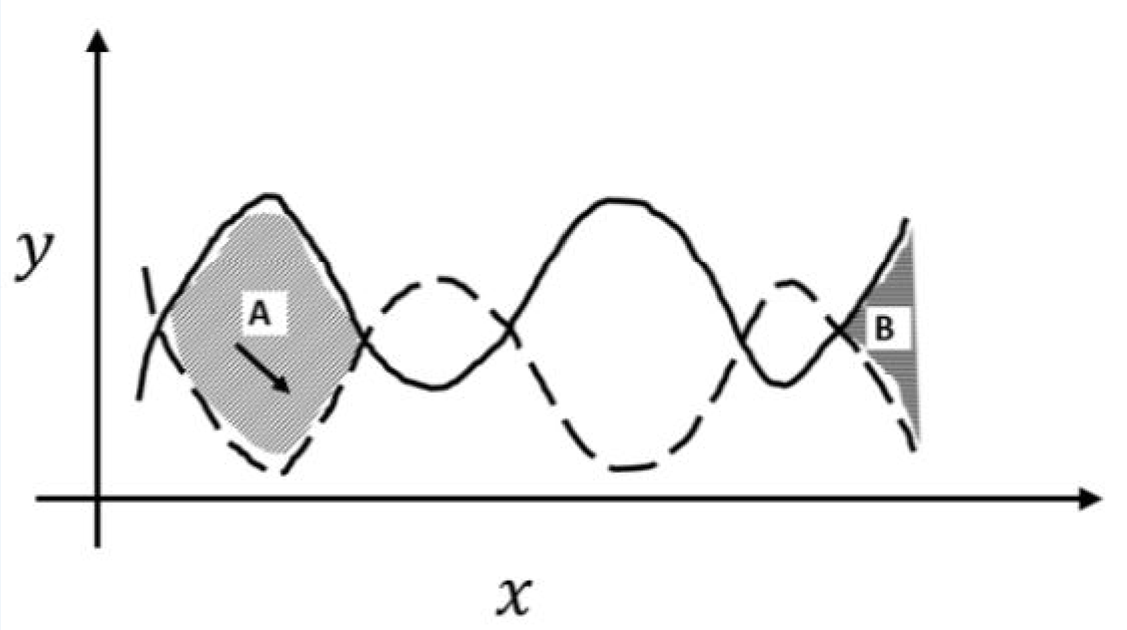
הקו הרצוף מייצג את עקום האפס של X (איפה שהנגזרת של X מתאפסת)

הקו המרוסק מייצג את עקום האפס של Y (איפה שהנגזרת של Y מתאפסת)



נתון כיוון הזרימה במרחב באזור A מה כיוון הזרימה באזור B?

שאלה 6



שאלה 7

עברתם בכיתה בתחילת הסמסטר על מודל SIR, מודל אפידמיולוגי אשר מתאר אנטראקציה בין S - "חשופים", I – "נגועים" ו-R-"מורחקים" בהקשר של התפרצות מחלות מדבקות.

לשם פשטות נניח עבור תרגיל זה כי $R = N - I - S$ כאשר N מיצג את גודל האוכלוסייה. מערכת המשוואות (הלא לינארית) אשר מתארת את הבעייה, נתונה כדלהלן:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma(N - S - I)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \nu I$$

שימו לב כי כל הפרמטרים חיוביים.
אפיינו את נקודות השבת תחת ההנחה $\beta N - v > 0$

שאלה 7

עקומי אפס

$$\dot{S} = 0 \quad \rightarrow \quad S = \frac{\gamma(N - I)}{\beta I + \gamma}$$

$$\dot{I} = 0 \quad \rightarrow \quad I = 0, \qquad S = \frac{v}{\beta}$$

שאלה 7

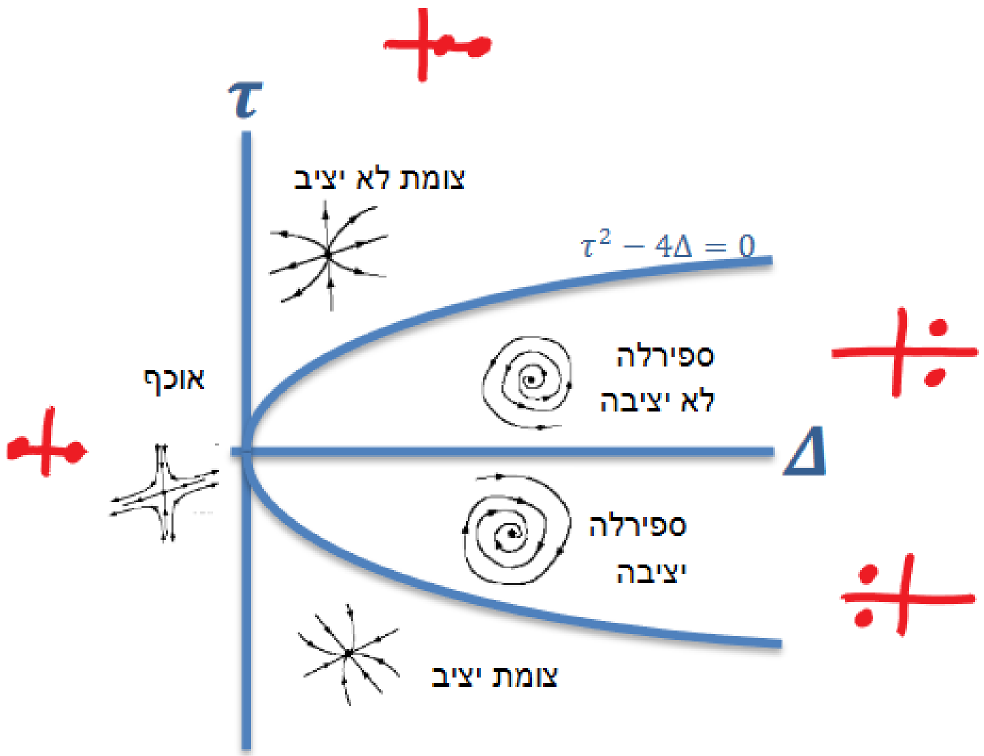
עקומי אפס

$$\dot{S} = 0 \quad \rightarrow \quad S = \frac{\gamma(N-I)}{\beta I + \gamma}$$

$$\dot{I} = 0 \quad \rightarrow \quad I = 0, \qquad S = \frac{v}{\beta}$$

נקודות שבת

$$\left(\frac{v}{\beta}, I\right) = \left(\frac{v}{\beta}, \frac{\gamma(\beta N - v)}{\beta(v+\gamma)}\right) \qquad (N, 0),$$


τ
צומת לא יציב
$\tau^2 - 4\Delta = 0$
ספירלה
לא יציבה
אוכף
Δ
ספירלה
יציבה
צומת יציב

שאלה 8

עקומי אפס $\dot{S} = 0 \quad \rightarrow \quad S = \frac{\gamma(N-I)}{\beta I + \gamma}$ $\qquad \dot{I} = 0 \quad \rightarrow \quad I = 0, \qquad S = \frac{v}{\beta}$

נקודות שבת $\left(\frac{v}{\beta}, I\right) = \left(\frac{v}{\beta}, \frac{\gamma(\beta N - v)}{\beta(v+\gamma)}\right)$ $\qquad (N, 0),$

יעקוביאן $\Delta > 0 \qquad \tau < 0,$

לצורך פשטות הניחו כי $v = 1 \quad \gamma = 1, \quad \beta = 1, \quad N = 2,$ מה יקרה למערכת עבור תנאי ההתחלה $(0.5, 0.5)$?