תרגיל כיתה 1 – מבוא למערכות דינמיות + רענון מתמטיקה

בחלק הראשון של הקורס נלמד איך לנתח מערכות דינמיות. מערכת דינמית היא מערכת המשתנה עם הזמן, למשל ריכוז אינסולין וסוכר בדם. אינסולין וסוכר משתנים גם כתלות בזמן וגם כתלות אחד בשני (ככל שיש יותר אינסולין יש פחות סוכר וככל שיש יותר סוכר יש יותר אינסולין) ועל כן הם מייצגים מערכת דינמית.

על מנת לתאר מערכת דינמית, אנו צריכים לתאר למעשה את הכללים שקובעים את השינוי בזמן של כל משתנה כפונקציה של מצב המערכת הנוכחי. מצב המערכת הוא אוסף ערכי המשתנים (למשל רמות האינסולין והסוכר).

קצב השינוי של משתנה x בזמן ייכתב בצורה: $\frac{dx}{dt}$, לעיתים נשתמש גם בסימון: $\dot{x}$, זוהי **הנגזרת של x לפי t.**

- dt מייצג שינוי קטן מאוד בזמן.
- dx מייצג שינוי במשתנה x המתרחש בפרק הזמן dt.

שאלה 1-מעבר ממערכת משוואות למילים

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\dot{x}_L = x_L(g_L - k_L) + k_H x_H$$
$$\dot{x}_H = x_H(g_H - k_H) + k_L x_L$$

המשוואות מתארות שינוי בכמות של שני סוגי תאים סרטניים: H,L. התאים מתחלקים בקצב מסוים תוך שמירת הזהות שלהם. התאים גם יכולים להחליף סוג בקצב מסוים.

תארו במלים את משמעות כל אחד מהפרמטרים. מהו מספר המימדים במערכת?

g_L - קצב החלוקה של תאים מסוג L.

g_H - קצב החלוקה של תאים מסוג H.

k_L - קצב המעבר מתאים סוג L ל H.

k_H - קצב המעבר מתאים סוג H ל L.

במערכת יש שני מימדים: H,L.

<u>שאלה 2- מעבר ממילים למערכת משוואות</u>

וירוסים (V) מדביקים תאי דם (T) בקצב k. הגוף מייצר תאי דם בקצב λ . קצב התמותה של התאים הוא d. תאי הדם המודבקים (I) מקבלים את החומר הגיניטי של הוירוס והופכים למפעלים עצמאיים לייצור וירוסים חדשים בקצב p והם מתים בקצב δ. וירוסים נשטפים מהגוף בקצב c.

מהו מספר הימימדים? מהן המשוואות המתארות את הדינמיקה של מספר תאי הדם (T), תאי הדם הדבוקים (I) והוירוסים (V)?

מספר המימדים הוא 3 : T, V, I.

$$\frac{dT}{dt} = \lambda - dT - KVT$$

$$\frac{dI}{dt} = KVT - \delta I$$

$$\frac{dV}{dt} = pI - cV$$

<u>הגדרה- מערכת משוואות לניארית</u>

מערכת משוואות לניארית היא אוסף של משוואות לניאריות, כך שניתן לרשום כל משוואה בתור צירוף לניארי של המשתנים.

לדוגמה:

במימד אחד:

$$\frac{dx}{dt} = ax + b$$

בשני מימדים:

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + bx_2 + c$$

$$\frac{dx_2}{dt} = dx_1 + ex_2 + f$$

<u>שאלה 3- מערכת משוואות לניארית/לא לניארית</u>

האם המערכות משאלות 1 ו 2 לניאריות?

המערכת משאלה 1 היא מערכת לניארית מכיוון שהמשוואות הן צירוץ לניארי של המשתנים.

המערכת משאלה 2 היא לא לניארית מכיוון שהיא כוללת כפל של המשתנים T ו V.

<u>הגדרה- סדר של משוואה דיפרנציאלית</u>

הסדר של משוואה דיפרנציאלית נקבע לפי הנגזרת הגבוהה ביותר. כל המשוואות שראינו עד כה הן מסדר ראשון מכיוון שהן כוללות אך ורק נגזרת ראשונה בזמן. בקורס ננתח גם מערכות מסדר שני, שכוללות נגזרת שנייה בזמן $\frac{d^2x}{dt^2}$ או $\ddot{x}$. למשל: $\ddot{x} = -a\dot{x} - bx$. נראה בהמשך הקורס שימוש במערכת מסדר שני כדי לתאר הנשמה מלאכותית.

רענון מתמטיקה

כדי לנתח את המערכות האלה, ניזכר בכמה מושגים מתמטיים שישמשו אותנו בקורס. כל מה שנראה אתם כבר מכירים, אבל ייתכן שעבר זמן רב מאז שפגשתם את הדברים לאחרונה.

פונקציות מעריכיות

פונקציה מעריכית היא פונקציה שמערבת שני מספרים – בסיס ומעריך: q^x.

הפונקציה המעריכית דועכת אם המעריך הוא שלילי, והיא מתייצבת על ערך קבוע ככל שערך ה- x גדל.
בצורה הפונקציונלית הפשוטה, הפונקציה דועכת ״כלפי מטה״ ומתייצבת על 0. לדוגמא:

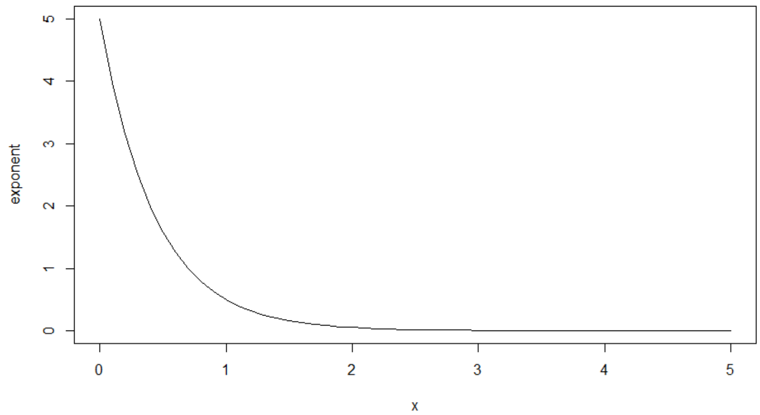
$$y = 5 \cdot 10^{-x}$$

קוד R:

```
q0 = 5
q = 10
x =seq(0,5,0.1)

exponent = q0*q^(-x)

plot(x, exponent,type="l")
```

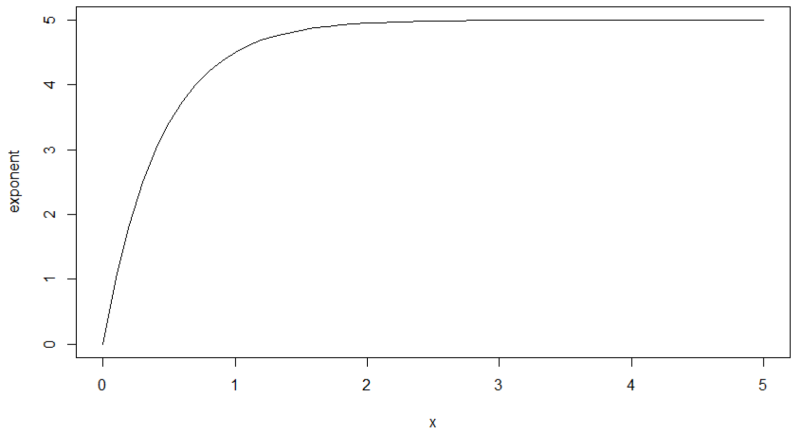


בצורה פונקציונלית מעט שונה, הפונקציה דועכת ״כלפי מעלה״ ומתייצב על מספר אחר. לדוגמא:

$$y = 5 \cdot (1 - 10^{-x})$$

```
exponent = q0*(1-q^(-x))

plot(x, exponent,type="l")
```



מטעמי נוחות בגזירה ואינטגרציה, משתמשים בדרך כלל כבסיס במספר $e \approx 2.71$.

<u>נגזרות</u>

נגזרת של פולינום:

$$\frac{d}{dx}(ax^b) = abx^{b-1}$$

נגזרת של אקספוננט:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

נגזרות של כל הפונקציות הבסיסיות אפשר למצוא בקלות בלוחות נגזרות.

נגזרת של מכפלת פונקציות:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \frac{d}{dx}(f)\cdot g + f\cdot\frac{d}{dx}(g)$$

נגזרת של פונקציה פנימית:

$$\frac{d}{dx}(f\big(g(x)\big) = \frac{d}{dg}(f)\cdot\frac{d}{dx}(g)$$

גזרו את הפונקציות הבאות:

$$7\mathrm{e}^{2\mathrm{x}} \rightarrow \frac{d(7\mathrm{e}^{2\mathrm{x}})}{dx} = 14\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}$$
$$3e^{x^2} \rightarrow \frac{d(3e^{x^2})}{dx} = 6xe^{x^2}$$
$$xe^x \rightarrow \frac{d(xe^x)}{dx} = e^x + xe^x$$

<u>מספרים מרוכבים</u>

מדומה טהור הוא שורש של מספר שלילי:

$$\sqrt{-1} = i$$
$$\sqrt{-4} = \sqrt{4\cdot(-1)} = 2\cdot i$$

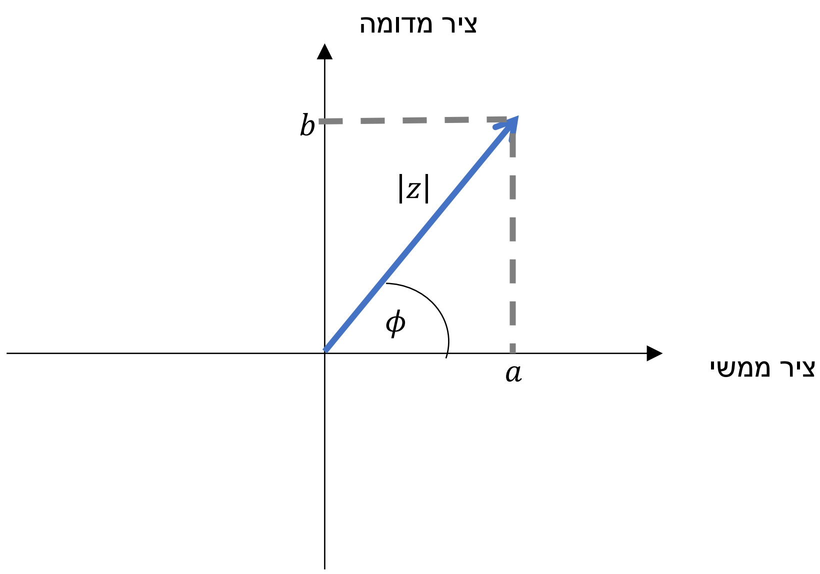
מספר מרוכב הוא מספר המכיל חלק ממשי וחלק מדומה:

$$z = a + bi$$

נוסחת אוילר מגדירה את האקספוננט של מספר מדומה:

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\cdot sin(\phi)$$

ניתן לייצג מספר מרוכב כווקטור במישור המרוכב:



ולפיכך ניתן לעבור להצגה פולרית של המספר המרוכב, באמצעות הזווית ואורך הווקטור:

$$z = a + ib = |z|cos\phi + i \cdot |z|sin\phi = |z| \cdot e^{i\phi}$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

במעבר האחרון עשינו שימוש בנוסחת אוילר.

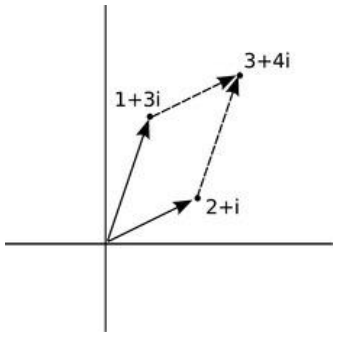
תרגיל: מהו הייצוג הפולרי של המספר i?

מספרים מרוכבים עם אקספוננט:

$$i^1 = \sqrt{-1}, \qquad i^5 = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1, \qquad i^6 = -1$$
$$i^3 = -i, \qquad i^7 = -i$$
$$i^4 = 1, \qquad i^8 = 1$$

נסתכל על ביצוע פעולות חשבונאיות במספרים מרוכבים:

סכימה – קל לבצע חיבור וחיסור של מספרים מרוכבים בייצוג הקרטזי – מחברים בנפרד את החלק הממשי ואת החלק המדומה:



$$(1 + 3i) + (2 + i) = 3 + 4i$$