מערכות דינמיות

1. <u>מבוא למערכות דינמיות</u>

מערכת דינמית:

$$\dot{x}(t)=\frac{dx(t)}{dt}=F(x(t),u(t),t)$$

כאשר $x(t)$ הוא <u>וקטור</u> משתני המצב של המערכת ו- $u(t)$ הוא <u>וקטור</u> הכניסות.

מוטיבציה: רוב המערכות בביולוגיה הן מערכות לא-לינאריות שלא ניתנות לפתרון אנליטי. בכל זאת נרצה לפתח גישה איכותית, אך מדויקת, המאפשרת לאפין את התנהגות הפתרון. במהלך הלימודים עד עתה עסקנו בעיקר במערכות לינאריות.

מודלים של מערכות דינמיות משמשים לניתוח ולחיזוי התנהגות של מערכות ביולוגיות באופן כללי ושל תאי עצב באופן פרטי (מודלים כאלו ילמדו בקורס). יש להן שימוש נרחב בתיאור מערכות מורכבות באופן כללי. מערכות ביולוגיות הן בד"כ סטוכסטיות, נושא שנדון בו רק בחלקים מאוחרים יותר של הקורס.

<u>מערכת אוטונומית</u>

מערכת אוטונומית היא מערכת בה השינוי במצב המערכת תלוי אך ורק ב $x(t)$ ולא בזמן באופן מפורש

$$\dot{x}(t)=F(x(t))$$

כלומר,

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)= f_1(x_1,\dots,x_n)\\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t)= f_n(x_1,\dots,x_n)\end{cases} \qquad ; \qquad F=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

$$\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$$

כאשר n נקרא "סדר" או "מימד" המערכת. במערכת אוטונומית, <u>כל השפעות העבר</u> מבוטאות באמצעות וקטור משתני המצב בהווה.

דוגמא 1- מטוטלת פיזיקלית

נתבונן במערכת:

$$\ddot{x}+\frac{g}{L}\sin x=0$$

ניתן להמיר מערכת לצורה (1.1):

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-\frac{g}{L}\sin x_1$$

פתרון מערכת זו נעשה בד"כ ע"י הקירוב $\sin x \approx x$ כאשר $x \ll 1$. פתרון אנליטי מדויק (ללא הקירוב הלינארי) קשה לחישוב במקרה זה, ובמקרים רבים אחרים איננו אפשרי. לעומת זאת, פתרון איכותי של התנהגות המערכת פשוט הרבה יותר, ע"י שיטות שנלמד בהמשך.

לפני שניגש לתיאור התנהגות הפתרון ניתן (ללא הוכחה) תנאי מספיק לקיום ויחידות הפתרון.
טענה: נתונה מערכת רב-ממדית מהצורה

$$\dot{x} = F(x), \quad x(0) = x_0$$

כאשר הפונקציה F רציפה והנגזרות $\partial f_i / \partial x_j$ רציפות. אזי (א) קיים פתרון, (ב) פתרון זה יחיד.

קריאה עצמית

דוגמא: מקרה בו לא קיים פתרון. נתבונן במערכת החד-ממדית

$$\dot{x} = \begin{cases} 1 & \text{if } x < 0 \\ -1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

לכל $x \neq 0$, אם קיים פתרון הוא חייב להיות $x(t) = |t|$. אבל פתרון זה אינו גזיר באפס, ולכן לא יכול להיות ש-$\dot{x}(0) = -1$. מכיוון שהגענו לסתירה, לא קיים פתרון.

דוגמא: מקרה בו קיימים מספר פתרונות. נתבונן במערכת החד-ממדית

$$\dot{x} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0$$

אזי שתי הפונקציות הבאות הן פתרונות:

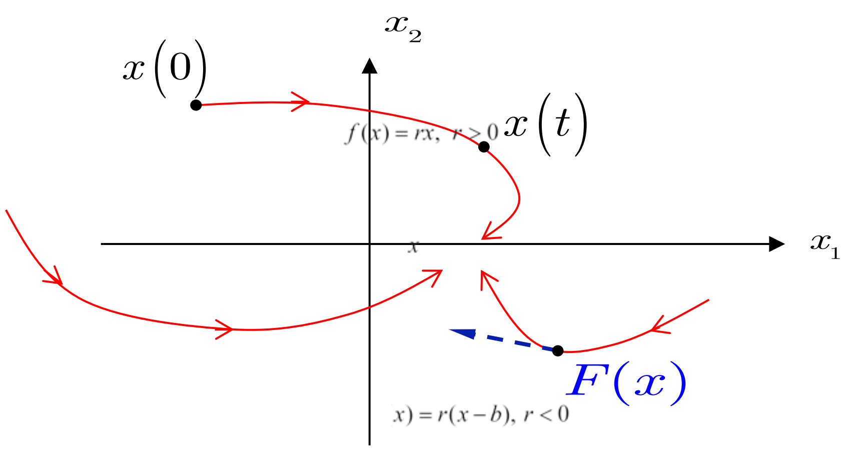
$$x_1(t) = 0 \quad ; \quad x_2(t) = t^3$$

בהמשך נניח תמיד כי תנאי המשפט מתקיימים, ולכן קיים פתרון והוא יחיד.

נבנה מרחב שהקואורדינטות שלו הן הרכיבים $x = (x_1, \dots, x_n)$. נניח כי נתון תנאי התחלה $x(0)$.

מכיוון שקיים פתרון יחיד, אזי לכל t מצב המערכת יהיה נקודה במרחב זה, והפתרון $x(t)$ יהיה העקומה שהיא אוסף כל הנקודות הללו, המתחילות - $x(0)$. עקומה זו נקראת **מסלול** המערכת והמרחב נקרא **מרחב הפאזה** או **מרחב המצב**. מכיוון שהפתרון הוא יחיד, המסלולים המתקבלים במרחב הפאזה לא נחתכים או מתפצלים[1] (אם כי הם יכולים להיות סגורים – מה המשמעות מסלול סגור?). בפרק זה נלמד לנתח מערכות אוטונומיות ולמצוא את צורת המסלולים במרחב הפאזה – מהם נסיק באופן איכותי אך מדויק את התנהגות המערכת. דוגמא למרחב מצב דו-מימדי מופיעה באיור:

[1] טענה זו נכונה עבור מערכות אוטונומיות. מדוע אינה נכונה למערכות שאינן אוטונומיות?



2. <u>מערכת מסדר ראשון: זרימה על קו ישר</u>

נתבונן ראשית במקרה בו n=1, כלומר:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{2.1}$$

א. <u>תזכורת: ניתוח מערכת ליניארית מסדר ראשון</u>

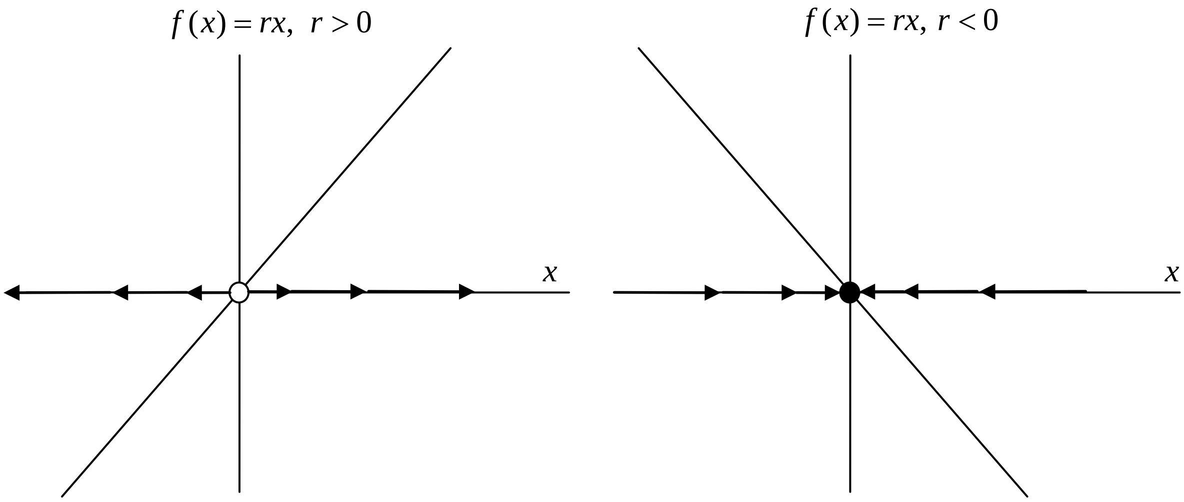
דוגמא 2- נתבונן באוכלוסית חידקים ונסמן ב- $x(t)$ את מספר הפרטים בזמן t. קצב הגידול היחסי של האוכלוסיה נתון ע״י הגודל $\dot{x}(t)/x(t)$ (אנו מתעלמים כאן מהעובדה ש x משתנה בדיד. זו מכשלה שניתן להתגבר עליה בגזירה מדויקת של המשוואות ממודל בדיד). בהנחה שקצב זה קבוע, נקבל את המד״ר

$$\dot{x}(t) = rx(t)$$

הפתרון כידוע הוא:

$$x(t) = x(0)e^{rt}$$

נשרטט את $\dot{x}$ כנגד x, ונסמן בחיצים את $\dot{x}$ בכל נקודה (קווי זרימה):

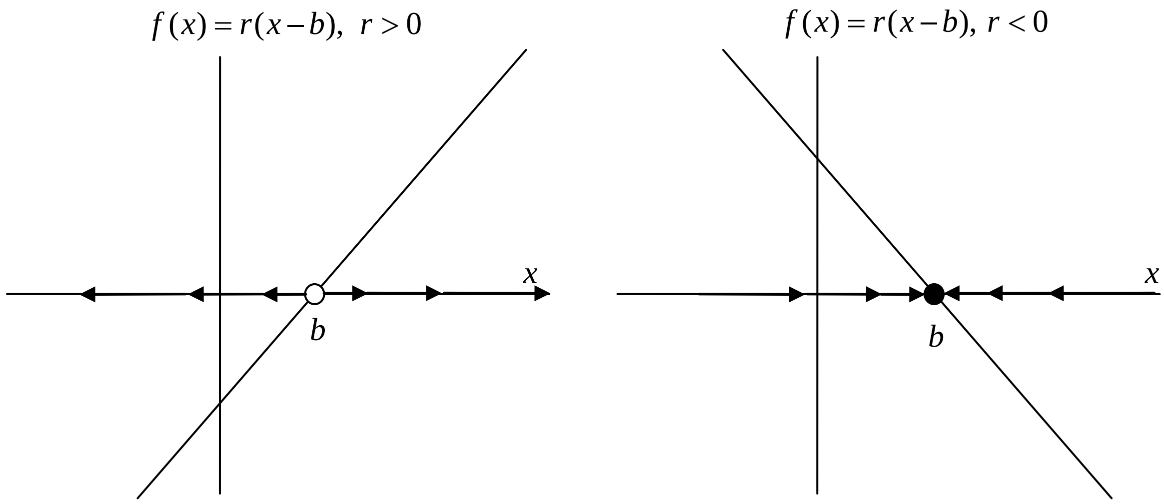


כצפוי, ישנה נקודה אחת (בראשית) בה אין מהירות כלל, ונקודה זו יציבה כאשר $r<0$ (תמותה, כל החיצים מובילים אליה) ואיננה יציבה כאשר $r>0$ (ריבוי, כל החיצים מובילים ממנה להתבדרות).

נניח עתה כי למערכת יש הגירה בקצב קבוע m, כלומר:

$$\dot{x}=rx+m=r\left(x-b\right),$$

כאשר $b=-\dfrac{m}{r}$.



התנהגות המערכת נותרה כשהייתה, פרט להזזת נקי שיווי המשקל ל-b, בה ההגירה מאזנת את קצב הריבוי/תמותה.

נסכם את שראינו עד כה:

- נקי החיתוך של $\dot{x}$ עם ציר x מגדירה את נקי שיווי המשקל של המערכת.
- שיפוע חיובי בנקי זו גורר נקי לא יציבה הנקראת גם **מקור** או **דוחֶה** (source, repeller)
  שיפוע שלילי גורר נקי יציבה הנקראת גם **יעד** או **מושֵך** (sink, attractor).

ב. ניתוח מערכת לא לינארית מסדר ראשון

עתה נתבונן במערכת כללית $\dot{x}=f\left(x\right)$ כאשר $f\left(x\right)$ כלשהי. נסמן ב- x^* נקודה המקיימת $f\left(x^*\right)=0$. ברור כי נקודה זו היא נקודת שיווי משקל של המערכת, שהרי בנקי זו $\dot{x}=0$. נרצה לדעת אם נקי זו היא מקור או מושך. נתבונן בהפרעה קטנה סביב נקודת שיווי המשקל. נגדיר:

$$\eta\left(t\right)=x\left(t\right)-x^*,$$

וברור כי:

$$\dot{\eta}=\dot{x}=f\left(x\right)=f\left(x^*+\eta\right).$$

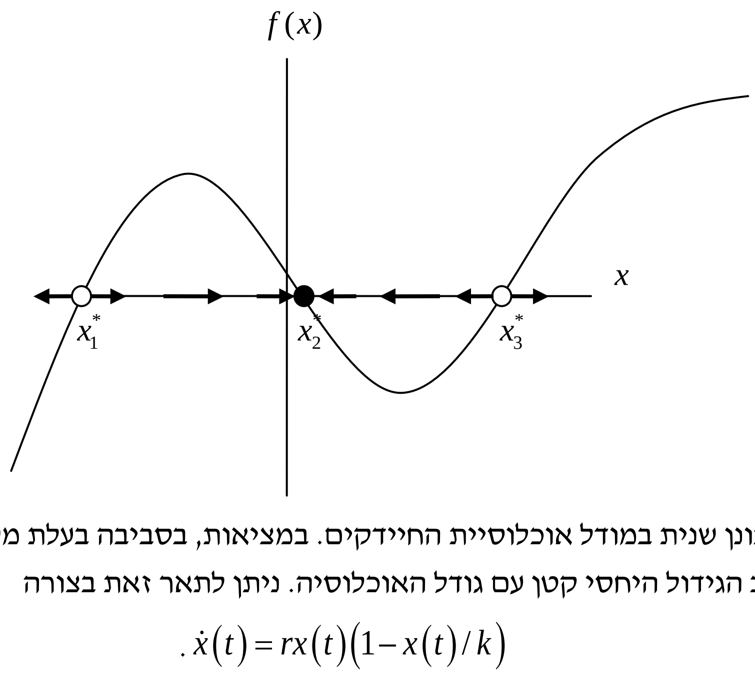
נפתח טור טיילור ונקבל:

$$\dot{\eta}=f\left(x^*+\eta\right)=f\left(x^*\right)+\eta f'\left(x^*\right)+O\left(\eta^2\right)=\eta f'\left(x^*\right)+O\left(\eta^2\right)$$

מכיוון ש- $f\left(x^*\right)=0$. בהנחה כי $f'\left(x^*\right)\neq 0$ ניתן להזניח את הגורמים מסדר שני ולקבל את הקירוב הליניארי סביב נקי שיווי המשקל:

$$\dot{\eta}\approx\eta f'\left(x^*\right) \qquad \text{(}f'\left(x^*\right)\text{ קבוע לצורך המשוואה)}$$

לכן, כמו במקרה הליניארי, אם השיפוע של $f\left(x\right)$ חיובי בנקי החיתוך הנקי תהיה מקור ואם השיפוע שלילי היא תהיה מושך.



דוגמה 3- נתבונן שנית במודל אוכלוסיית החיידקים. במציאות, בסביבה בעלת משאבים מוגבלים, קצב הגידול היחסי קטן עם גודל האוכלוסיה. ניתן לתאר זאת בצורה

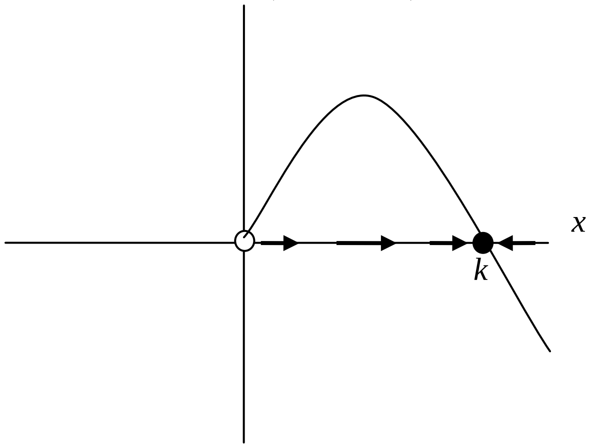
$$\dot{x}\left(t\right)=rx\left(t\right)\left(1-x\left(t\right)/k\right).$$

משוואה זו נקראת 'המשוואה הלוגיסטית', והיא ניתנת לפתרון באופן אנליטי:

$$x\left(t\right)=\frac{kx_0e^{rt}}{k+x_0\left(e^{rt}-1\right)}\to k\quad\left(t\to\infty\right)$$

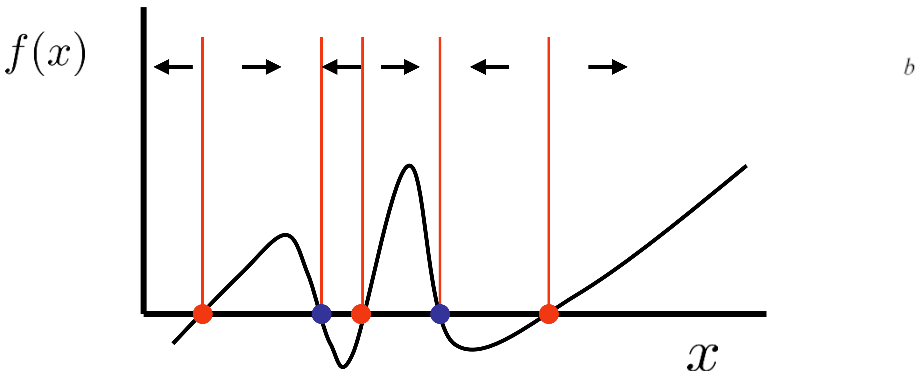
כלומר, האוכלוסיה מגיע לערך אסימפטוטי קבוע הנקרא carrying capacity. נראה זאת באופן גראפי במרחב המצב:

$$f(x) = rx(t)\left(1 - x(t)/k\right)$$



<u>טענה:</u> למערכת החד-ממדית האוטונומית $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}$ אין פתרון מחזורי.

<u>הוכחה:</u> התבוננו באיור ובכיווני החיצים.



ג. <u>פונקצית הפוטנציאל</u>

במערכת (2.1) נגדיר פונקצית פוטנציאל $V(x)$ באופן הבא:

$$V(x) \triangleq -\int_0^x f(x')dx'$$

נגזור את הפוטנציאל לפי הזמן,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx}f(x) = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \le 0 .$$

לכן הפוטנציאל הוא פונקציה מונוטונית לא עולה וה'חלקיק' ינוע במסלול במורד הפוטנציאל.

נק׳ שיווי המשקל הם הנק׳ בהן $\frac{dV}{dx}=0$, כאשר נק׳ מקסימום בפוטנציאל מתארות נק׳ לא יציבה ונק׳ מינימום - נק׳ יציבה.

ד. <u>תורת ההסתעפויות</u>

מערכות דינמיות בד״כ תלויות בפרמטרים (למשל g,L בדוגמת המטוטלת).
כפי שראינו, אנו יכולים לאפיין התנהגות של מערכת מסדר ראשון בקלות יחסית מהתבוננות במבנה השדה הווקטורי במרחב הפאזה (הקו הישר). מבנה זה עשוי להשתנות באופן קיצוני כאשר משתנים הפרמטרים של המערכת. במודלים של מערכות מציאותיות יש חשיבות לניתוח שינויים אלו. לכך מגוון סיבות.

1) מערכות המשויכות לאותו סוג (כגון תאי עצב) נבדלות זו מזו בערכי הפרמטרים המתאימים להם. בפרט, הפרמטר של אותה מערכת עצמה יכולים להשתנות עם הזמן. גם לא ניתן למדוד או לחזות בדיוק מושלם ערך של פרמטר ולכן תמיד חייבים להניח רמת אי-וודאות מסויימת. למשל, שינוי קטן בערכי המוליכות של הנתרן והאשלגן יכול לשנות בצורה משמעותית את תבנית הירי של תא בתגובה לגירוי. במערכות ביולוגיות יכולים פרמטרים מסוימים (למשל מוליכות) להיות תלויים במשתנים אחרים, כגון ריכוז ניורומודולטור.
2) על מנת לנתח את תגובת המערכת לכניסה, ניתן להגדיר את הכניסה כפרמטר ולבדוק כיצד תגובת המערכת משתנה כתלות בערכו של פרמטר זה.
3) לעיתים מכניסים למודל משתנים, שקצב השתנותם איטי יחסית, בתור פרמטרים. דבר זה יכול לפשט את ניתוח ההתנהגות של מערכת ולכן הוא נעשה גם במקרים בהם הדינמיקה של משתנים אלו נתונה.

מסיבות כאלו חשוב לנתח משפחה של מערכות הנבדלות בערכי הפרמטרים ולא מערכת יחידה. לצורך זה, חשוב למצוא את נקודות ההסתעפות של המשפחה.

<u>הסתעפות</u> (Bifurcation) היא שינוי במבנה הטופולוגי של מרחב המצב כתוצאה משינוי בפרמטר\ים של המערכת. לדוגמא: היווצרות או העלמות של נקודות שיווי משקל; הפיכה של נקודת שיווי משקל יציבה לבלתי יציבה או להיפך (במערכות ממימד גדול מ-1 ייתכנו מצבים מורכבים יותר, אליהם נגיע בהמשך). ערך הפרמטר בו מתחולל שינוי מסוג זה נקרא נקודת הסתעפות. שימו לב לכך שנקודת הסתעפות היא <u>נקודה במרחב הפרמטרים</u> ולא במרחב המצב.

נראה מספר טיפוסים של הסתעפויות, אך נתחיל במקרה הלינארי בו טיפלנו כבר.

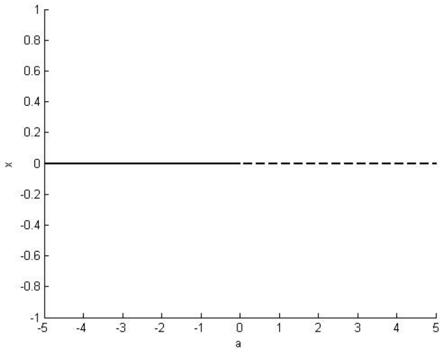
<u>איבוד יציבות</u>
במקרה זה נש״מ הופכת מיציבה ללא יציבה.

דוגמא 4- נתחיל בדוגמא שכבר נתקלנו בה – המקרה הלינארי.

נתונה המערכת החד-מימדית $\dot{x} = ax$.

למערכת זו יש נקודת שיווי משקל ב $\hat{x} = 0$. נקודת שיווי המשקל יציבה עבור $a < 0$ ובלתי יציבה עבור $a > 0$. לפיכך למערכת יש הסתעפות ב $a = 0$.

ניתן לתאר נקודת הסתעפות זו באמצעות דיאגרמת הסתעפות, בה ציר אחד מתאר את הפרמטר והציר השני מתאר את נקודות שיווי המשקל. הקו רצוף מתאר נקודת שיווי משקל יציבה וקו מקווקו מתאר נקודת שיווי משקל בלתי יציבה.



<u>הסתעפות אוכף (saddle-node bifurcation)</u>

הסתעפות זו באה לידי ביטוי כאשר שינוי פרמטר גורם להתקרבות של נש״מ יציבה ונש״מ בלתי יציבה זו לזו עד שהן מתאחדות ומבטלות זו את זו.

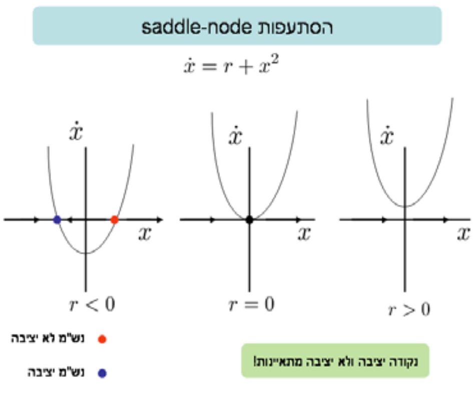
דוגמא 5

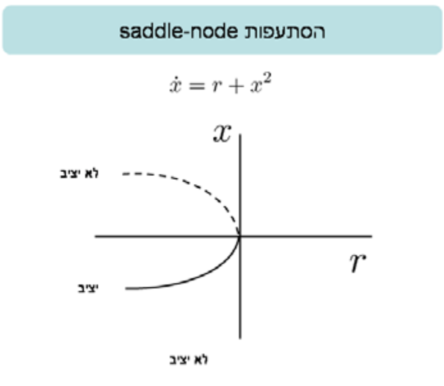
נתונה המערכת החד-מימדית $\dot{x} = r + x^2$.

באיור הבא מתוארת התנהגות המערכת עבור ערכים שונים של הפרמטר r .

עבור $r > 0$ אין למערכת זו נקודות שיווי משקל. <u>שימו לב</u>: $x \in \mathbb{R}$, ולא מקבל ערכים מרוכבים!

עבור $r < 0$ יש למערכת זו שתי נקודות שיווי משקל: נקודת שיווי משקל יציבה ב $x = -\sqrt{-r}$ ונקודת שיווי משקל בלתי יציבה ב $x = \sqrt{-r}$. לפיכך למערכת יש הסתעפות ב $r = 0$.





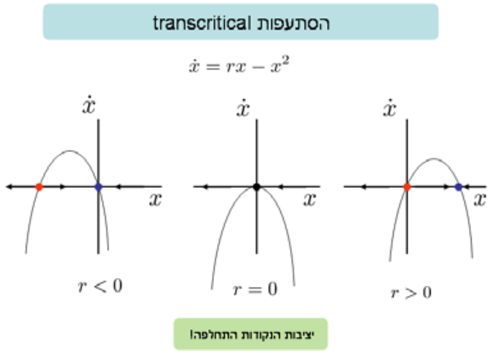
<u>הסתעפות טראנס-קריטית</u> (transcritical bifurcation)

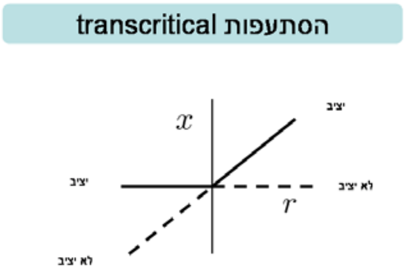
הסתעפות המתארת מצב בו שינוי פרמטר גורם לנקי׳ יציבה ובלתי יציבה להחליף תפקידים.

דוגמא 6

נתונה המערכת החד-מימדית $\dot{x}=(r-x)x$. למערכת יש שתי נש"מ לכל $r\neq 0$.

כפי שנראה באיור הנש"מ מחליפות את יציבויותיהן בנקודה $r=0$.





<u>הסתעפות קלשון (pitchfork bifurcation)</u>

הסתעפות זו אופיינית למערכות בהן קיימת **סימטריה**. היא מתארת מצב בו נוצר צמד סימטרי של נקי שיווי משקל.

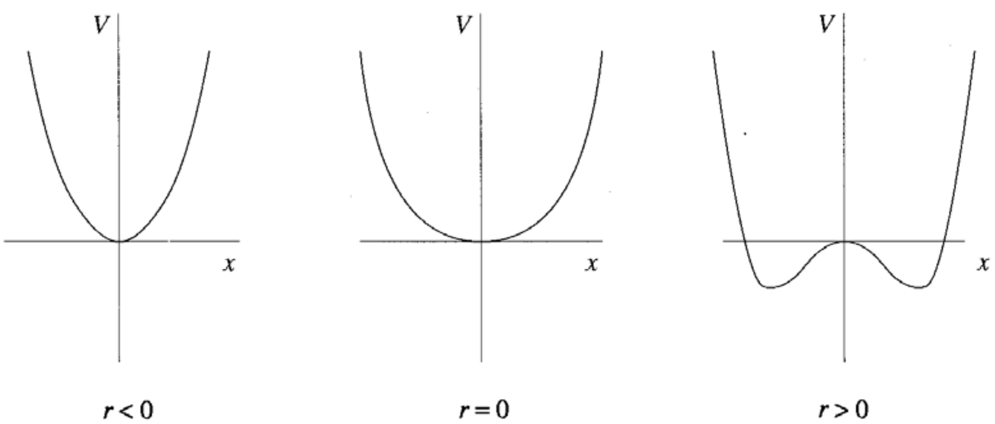
דוגמא 7

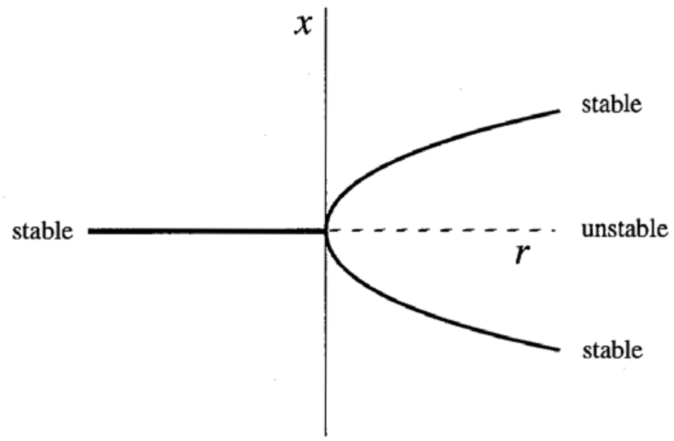
נתונה המערכת החד-מימדית $\dot{x}=rx-x^3$. למערכת יש נש"מ אחת כאשר r≤0 ושלוש כאשר r>0.

ננתח את יציבותן באמצעות פונקצית הפוטנציאל:

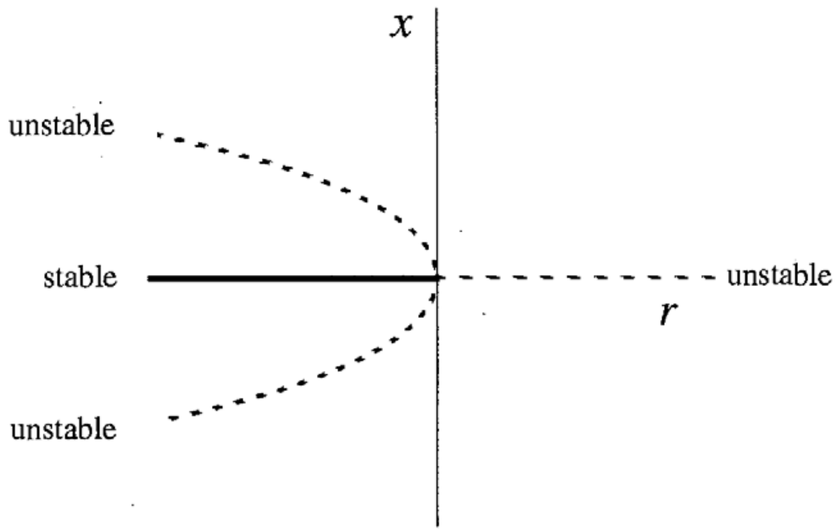
$$V(x)=-\frac{1}{2}rx^2+\frac{1}{4}x^4$$

שימו לב שבגרף מוצג $V(x)$ ולא $f(x)$ ושהחלקיק נע במורד הפוטנציאל.





זוהי **הסתעפות קילשון סופר-קריטית** בה מתפלגת נש״מ יציבה לשתים יציבות ואחת לא יציבה.
קיימת גם **הסתעפות קלשון סאב-קריטית** בה מתאחדות שתי נש״מ לא יציבות עם נש״מ יציבה,
לדוגמא במערכת $\dot{x} = rx + x^3$ תתקבל הדיאגרמה הבאה:



3. מערכות רב-מימדיות

א. פתרון של מערכת לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

מערכת אוטונומית ליניארית

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b, \quad \left(x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n\right)$$

כאשר A היא מטריצה של מקדמים קבועים (שאינם תלויים בזמן) ו- b הוא ווקטור קבועים.

מערכת לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad \left(x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$$

כאשר A היא מטריצה של מקדמים קבועים.

רוב המערכות בטבע אינן מסוג זה. למרות זאת, מערכות הומוגניות עם מקדמים קבועים מאוד חשובות, משום שהן משמשות בסיס לניתוח של מערכות כלשהן.

הבעיה

נתונה מערכת משוואות דיפרנציאליות מהצורה

$$\dot{x} = Ax$$
$$x(t=0) = x_0$$

כאשר $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$ ו- A היא מטריצה $n \times n$.

מהו הפתרון?

מתברר שניתן להכליל את הפתרון של המד״ר החד מימדי למקרה הרב מימדי

$$x \in \mathbb{R} : \dot{x} = ax \Rightarrow x(t) = e^{at}x_0$$
$$x \in \mathbb{R}^n : \dot{x} = Ax \Rightarrow x(t) = e^{At}x_0$$

כאשר e^{At} הוא אקספוננט של מטריצה המוגדר לפי

$$e^A \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad ; \quad e^{At} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

$x(t) = e^{At}x_0$ היא תיאור אלגנטי של פתרון המשוואה עבור משתנה וקטורי, השימושית בעיקר לצורך הוכחה של משפטים מתמטיים. לעומת זאת, כאשר מעוניינים בפתרון עבור בעיה ספציפית, צריך לחשב במפורש את e^{At}, ויש למצוא את הערכים העצמיים (ע״ע) והווקטורים העצמיים

(ו״ע) של A. אבל כפי שנראה מיד, אם יודעים את הע״ע והו״ע של A אז כבר קל למצוא את הפתרון.

נסמן את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של A ב- $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ ו- $\left\{V^{(k)}\right\}_{k=1}^{n}$ בהתאמה.

<u>הנחה:</u> n הע״ע שונים זה מזה ומתאימים ל-n ו״ע בת״ל (בנספח המופיע בסוף פרק זה מוסבר מה קורה כשאין זה המצב).

1. נשים לב ש $V^{(k)}e^{\lambda_k t}$ הוא פתרון של המערכת עבור ת״ה $x(0)=V^{(k)}$:

$$\dot{x}=\frac{d}{dt}V^{(k)}e^{\lambda_k t}=V^{(k)}\lambda_k e^{\lambda_k t}=AV^{(k)}e^{\lambda_k t}=Ax$$

2. כל קומבינציה לינארית מהצורה $\sum_{k=1}^{n}c_kV^{(k)}e^{\lambda_k t}$ היא גם פתרון (c_k קבועים כלשהם).

3. עבור A ממשית, הע״ע הם ממשיים או מופיעים בזוגות של מספרים מרוכבים צמודים. במקרה המרוכב, קיימים שני פתרונות, קרי $x^{(1)}(t)=V^{(k)}e^{\lambda_k t}$ ו- $x^{(2)}(t)=\overline{V}^{(k)}e^{\overline{\lambda}_k t}=\overline{x}^{(1)}(t)$ פתרון.

טענה זו נובעת מהעובדה ש $AV=\lambda V \;\Rightarrow\; A\overline{V}=\overline{\lambda}\overline{V}$.

שיטת הפתרון

1) מוצאים את הערכים העצמיים ואת הוקטורים העצמיים של A .

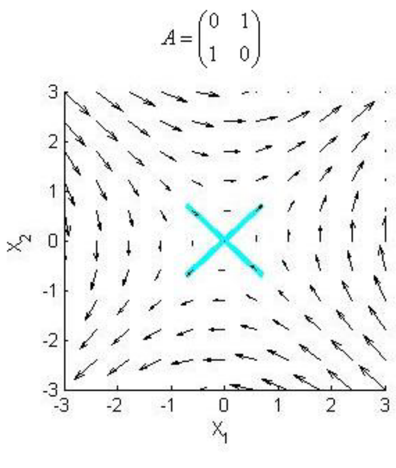
2) כל וקטור עצמי תורם רכיב של הפתרון $x^{(k)}(t)$. סוג הפתרון תלוי בסוג הערך העצמי : ערך עצמי ממשי או זוג מרוכב.

הפתרון הוא צירוף ליניארי של רכיביו $x(t)=\sum_{k=1}^{n}c_kx^{(k)}(t)$, כאשר המקדמים c_k נקבעים באופן חד ערכי על פי תנאי ההתחלה.

דוגמא 1 (ע״ע ממשיים):

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)\end{cases}$$

$x_1(0)=1 \qquad x_2(0)=0$



$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=1,\;V^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad,\quad\lambda_2=-1,\;V^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

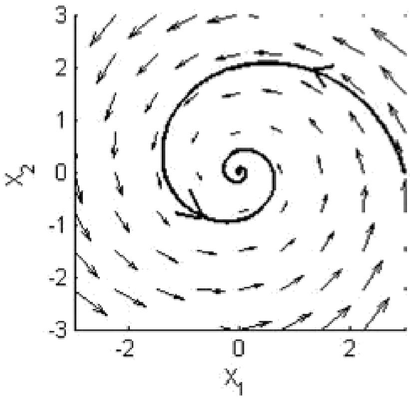
$$\Rightarrow\quad x(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t}$$

$$x(0)=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{1}{2}\quad,\quad c_2=\frac{1}{2}$$

$$x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{t}+e^{-t}\\e^{t}-e^{-t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh(t)\\\sinh(t)\end{pmatrix}$$

דוגמא 2 (ע"ע מרוכבים צמודים):

$$A=\begin{pmatrix}-1&-4\\4&-1\end{pmatrix}\qquad\qquad x_0=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$



מקרים בעלי ריבוי גדול מ-1 דורשים טיפול מיוחד. הפתרון הכללי מופיע בנספח. מקרה פרטי של מערכות מסדר 2 בהן נתמקד, יופיע בהמשך.

יציבות

<u>אינטואיטיבית</u> : x^* נקודת שיווי משקל יציבה אם קיימת סביבה של x^* כך שמכל נקודת התחלה בסביבה זו המערכת תשאף לחזור לסביבת x^* .

עתה ניתן שתי הגדרות פורמליות ומדויקות יותר למושג היציבות.
תחילה נגדיר את המרחק בין שתי נקודות x,y בתור המרחק האוקלידי הרגיל

$$\left\|x-y\right\|^2 \triangleq \left(x-y\right)^T\left(x-y\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)^2$$

<u>יציבות ליאפונוב</u> :

לכל $R>0$ קיים $r>0$ כך שאם $\left\|x(0)-x^*\right\|<r$ אזי $\left\|x(t)-x^*\right\|<R$ לכל $t\geq 0$.

<u>יציבות אסימפטוטית</u> :

x^* נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית אם היא יציבה ליאפונוב, ואם קיים $r>0$ כך ש-
$\left\|x(0)-x^*\right\|<r$ גורר $\left\|x(t)-x^*\right\|\to 0$ ל- $t\to\infty$.

ברור כי יציבות אסימפטוטית גוררת יציבות לפי ליאפונוב.

<u>*משפט*</u> : x^* *נקודת שיווי משקל יציבה אסימפטוטית של* מערכת לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים אם ורק אם x^* נקודת שיווי משקל ו- $\forall k \quad \mathrm{Re}\{\lambda_k\}<0$.

<u>הוכחה</u> : במקרה של ע״ע בעלי ריבוי 1, הפתרון ניתן לפירוק לרכיבים $x^{(k)}(t)$ בת״ל מהצורה $V_k e^{\mathrm{Re}\{\lambda_k\}\cdot t}$. לכן אם $\mathrm{Re}\{\lambda_k\}<0$ ברור ש- $\lim_{t\to\infty}x_i(t)=0$

מצד שני, אם קיים רכיב $x^{(k)}(t)$ עם $\mathrm{Re}\{\lambda_k\}\geq 0$, אזי מאחר שרכיבי הפתרון בת״ל, קיימת בסביבת הנש״מ נקודת התחלה בה לרכיב זה מקדם שונה אפס. מאחר שרכיב זה לא מתכנס לאפס, המערכת לא תחזור לנקודת שיווי המשקל.
במקרה שבו הריבוי גדול מ-1 יש לנקוט במשנה זהירות, אך הטענה עדיין תקפה.

נסכם את המקרים השונים עבור n=2:

לפי מיקום הערכים העצמיים:

$$\lambda = \mathrm{Re}\left[\lambda\right] + j\,\mathrm{Im}\left[\lambda\right] \triangleq \sigma + j\omega$$

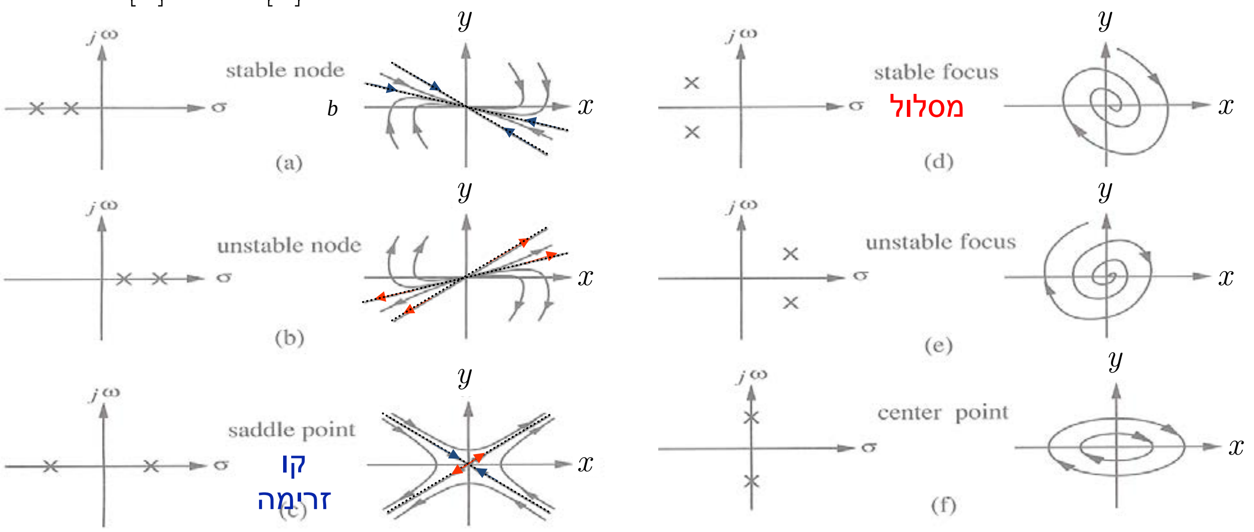


Figure 2.9 : Phase-portraits of linear systems

$$x\left(t\right) = c_1 \cdot V^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot V^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

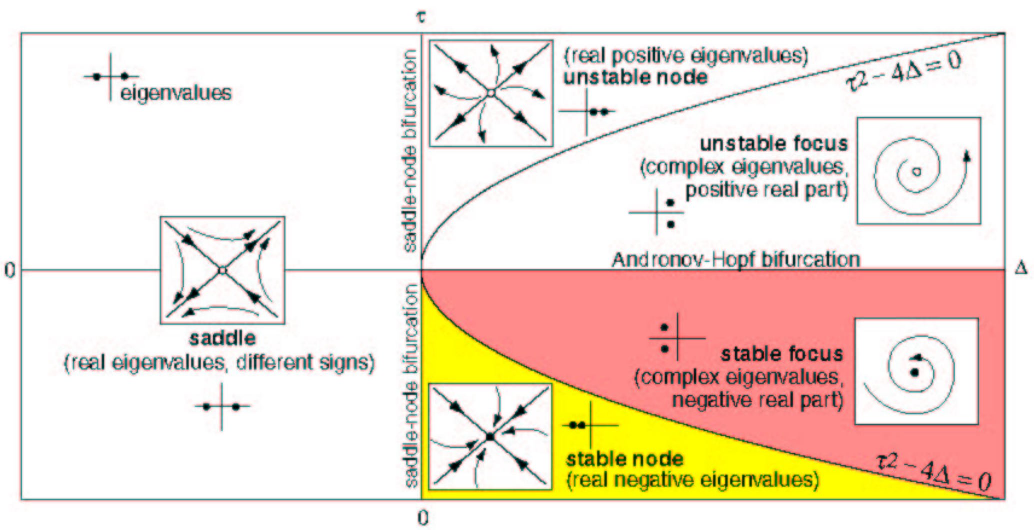
לפי מקדמי הפולינום האופייני:

נגדיר $\Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \mathrm{Det}\left(A\right)$; $\tau = A_{11} + A_{22} = \mathrm{Tr}\left(A\right)$

הערכים העצמיים מתקבלים מפתרון המשוואה

$$\det\left(\lambda I - A\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\lambda - A_{11}\right)\left(\lambda - A_{22}\right) - A_{12}A_{21} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

ולכן: $\lambda_{12} = \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}\right)\Big/2$.



ב. <u>ניתוח מערכות לא ליניאריות במרחב המצב</u>

עתה נתונה מערכת אוטונומית כללית מהצורה

$$\dot{x} = F(x) \qquad (*)$$

כלומר,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \qquad \vdots \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

בניגוד למקרה החד-מימדי, אשר התנהגותו תמיד מונוטונית (התכנסות לנש"מ יציבה או התבדרות), במקרה הרב-מימדי יתכנו התנהגויות עשירות יותר:

- התבדרות
- התכנסות לנש"מ
- התכנסות להתנהגות מחזורית
- התנהגות כאוטית (רק בממד 3 ומעלה – לא נדון בקורס זה)

תיאור מלא של ההתנהגות ניתן ע"י שרטוט של כל המסלולים "החשובים" במרחב הפאזה, כמו בדוגמא להלן. בהמשך נראה איך בונים דיאגרמה זו.

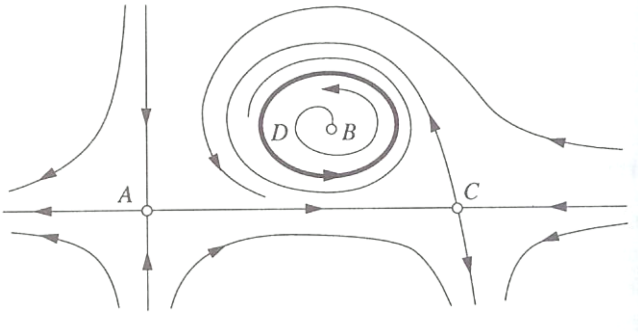


Figure 6.1.2

i. **ליניאריזציה סביב נקודות שיווי משקל**

מציאת נקודות שיווי המשקל

נקודות שיווי המשקל מוגדרות כנקודות x^* המקיימות:

$$F(x^*) = 0$$

- באופן כללי, חישוב הפתרון למשוואה זו עשוי להיות מסובך.
- שלא כמו מערכת הומוגנית (לא סינגולרית) עם מקדמים קבועים, מספר נקודות שיווי המשקל הוא לאו דווקא אחד. לדוגמא, למערכת החד ממדית $\dot{x} = \sin(x)$ יש אינסוף נקודות שיווי משקל.

ניתוח נקודות שיווי המשקל

כמו במקרה החד-מימדי, נבצע קירוב ליניארי של המערכת $\dot{x}=F(x)$ סביב כל אחת מנקודות שיווי משקל x^* ע"י פיתוח טיילור:

$$\dot{x}_i = f_i\left(x_1,...,x_n\right)$$

$$\cong f_i\left(x_1^*,...,x_n^*\right)+\frac{\partial f_i\left(x_1^*,...,x_n^*\right)}{\partial x_1}\cdot\left(x_1-x_1^*\right)+\cdots+\frac{\partial f_i\left(x_1^*,...,x_n^*\right)}{\partial x_n}\cdot\left(x_n-x_n^*\right)+O\left(\left\|x-x^*\right\|^2\right)$$

נסמן $\Delta x = x - x^*$ ואת היעקוביאן

$$A\left(x^*\right)\triangleq\vec{\nabla}F\left(x\right)\Big|_{x=x^*}\triangleq\left.\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\right|_{x=x^*}$$

בהנחה כי הע"ע של A אינם אפס או מספר מדומה טהור ניתן להזניח את הגורמים מסדר גבוה יותר ונקבל קירוב ליניארי של משוואות המערכת:

$$\Delta\dot{x}=\dot{x}\approx \cancel{F(x^*)}+A(x^*)\Delta x = A(x^*)\Delta x$$

כלומר, עבור ת"ה קרוב לנש"מ וזמנים קצרים (מדוע?), *המערכת מתנהגת כמערכת לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים בזמן* (אך תלויים במיקום הנש"מ x^*)

$$\Delta\dot{x}\approx A\Delta x$$

מכאן, ליד נש"מ, שבה הע"ע שונים זה מזה, ואינם מספר מדומה טהור, הפתרון יהיה מהצורה

$$x\left(t\right)\approx x^*+\sum_k c_k V^{(k)}e^{\lambda_k t}$$

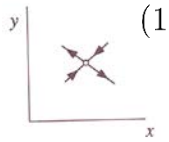
<u>הערה:</u> מקרי גבול בעלי ע"ע עם ריבוי גדול מ-1, ע"ע שמתאפסים או ע"ע מדומים טהורים דורשים טיפול מיוחד. לא נדון בזאת כאן.

כיוונים: התנועה

דוגמא 8: דינמיקה של אוכלוסיות מתחרות.

שתי אוכלוסיות מתחרות על משאב משותף (למשל, עשב).
$$\dot{x} = x\left(3 - x - 2y\right)$$
$$\dot{y} = y\left(2 - x - y\right)$$

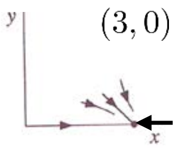
$(1,1)$



$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda = -1 \pm \sqrt{2}$$

ספירלה/פוקו
ס לא יציבה

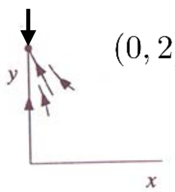
$(3,0)$



$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda = \{-3, -1\}$$

צומת לא
יציב

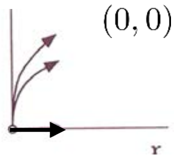
$(0,2)$



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\lambda = \{-1, -2\}$$

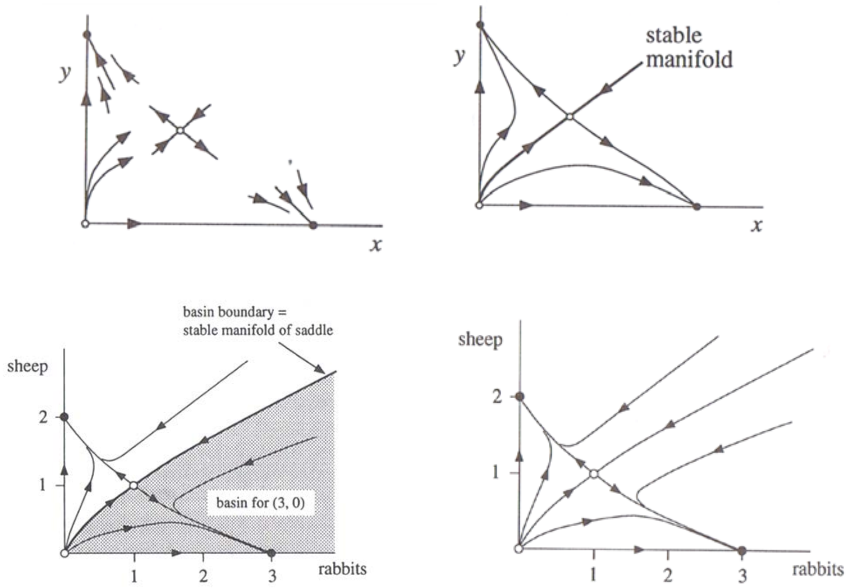
ספירלה/פוקו
ס יציבה

$(0,0)$



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\lambda = \{3, 2\}$$

צומת יציב



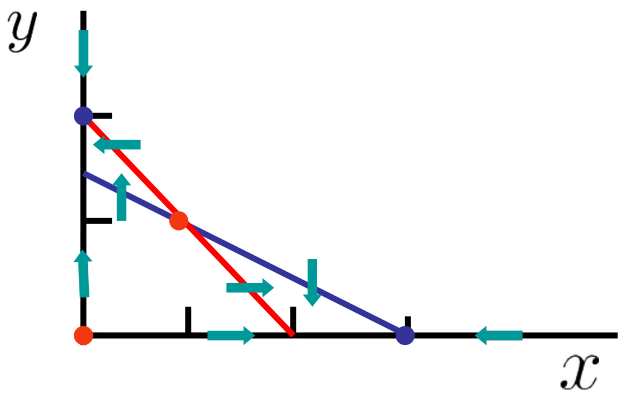
עקומי ה-nullclines (עקומי האפס)

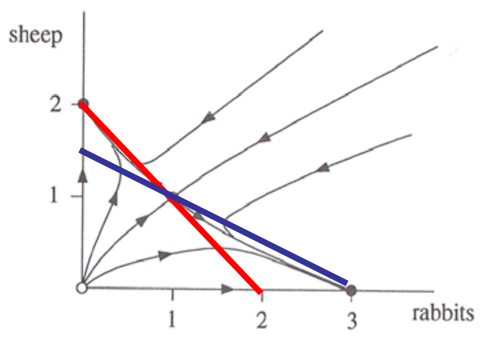
שני עקומים חשובים שהם קלים לחישוב ועוזרים להבין את כיווני הזרימה מתקבלים ע"י השוואת הנגזרות לאפס,

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = 0$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = 0$$

על עקומים אלה הזרימה אנכית ($\dot{x}_1 = 0$) או אופקית ($\dot{x}_2 = 0$). בנש"מ $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ אין זרימה כלל – זו נקודת המפגש של עקומי האפס. ה-nullclines יאפשרו לנו בהמשך להשתמש בתובנות ממערכות חד-מימדיות (כמו למשל הסתעפויות) במערכות רב-מימדיות.

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } 3 - x - 2y = 0$$
$$\dot{y} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ or } 2 - x - y = 0$$





ii. מחזורי גבול- limit cycles

הגדרה

מחזור גבול (Limit Cycle) הוא:

א. מסלול סגור, מחזורי בזמן. כלומר קיים T כך ש: $\forall t \geq 0 : x(t+T) = x(t)$

ב. מבודד ממסלולים סגורים אחרים. כלומר קיימת סביבה של המסלול הסגור במרחב המצב, בה אין אף מסלול סגור נוסף. כאמור, מסלול כזה מתאים להתנהגות מחזורית בציר הזמן.

היתכנות

מחזור גבול אפשרי רק במערכות לא ליניאריות מסדר שני ומעלה.

1) במערכות מסדר ראשון לא יתכן מסלול מחזורי מסוג כלשהוא – ראינו זאת כבר.

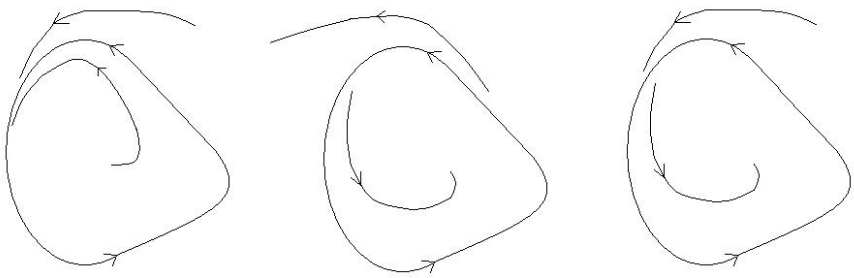
2) כפי שראינו, במערכות ליניאריות מסדר שני יתכן מסלול מחזורי מסביב לנקודת מרכז שבה שני הע״ע מדומים. עם זאת, מסלול מחזורי זה אינו מבודד. מאחר שהמסלול הוא פתרון של מערכת ליניארית, גם מכפלה של פתרון זה בקבוע היא מסלול סגור. לפיכך, עבור סביבה נתונה של המסלול המחזורי, ניתן להכפיל את הפתרון בקבוע מספיק קרוב לאחד, כך שיתקבל מסלול מחזורי נוסף בסביבה זו.

נקודת מרכז

סוגים של מחזורי גבול

מאחר שמחזור הגבול הוא מסלול מחזורי מבודד, כל מסלול המתחיל בקרבה של מסלול מחזורי חייב להתקרב אליו או להתרחק ממנו. אם עבור כל מסלול שמתחיל בנקודה מספיק קרובה למחזור הגבול, מתקיים שהמרחק של המסלול ממחזור הגבול שואף לאפס כאשר $t \to \infty$ אזי מחזור הגבול נקרא מחזור גבול יציב או מושך (Attractor).

באופן דומה ניתן להגדיר גם מחזור גבול בלתי יציב או דוחה (Repeller) כמחזור גבול שנקודות קרובות שואפות להתרחק ממנו.קיימים גם מקרי גבול בהם מחזור הגבול מושך מצידו האחד ודוחה מצידו האחר.

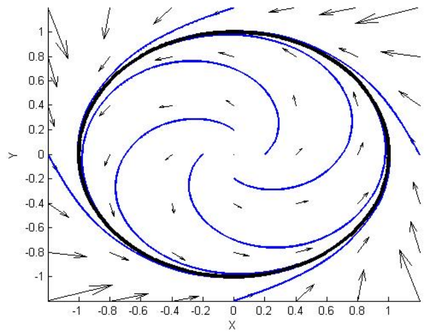


דוגמא 9:

נתונה המערכת הדו-מימדית

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x^2-y^2)-y \\ \dot{y} = y(1-x^2-y^2)+x \end{cases}$$

למשוואת



להבדיל מנש"מ, אותן ניתן למצוא ולסווג באופן ישיר, מציאת מחזורי גבול וסיווגם איננו תמיד אפשרי ולעיתים יש צורך להשתמש ב'רמזים' ממבנה מרחב המצב, כפי שנראה בסעיף הבא.

<u>ג. תכונות גלובאליות במרחב המצב</u>

התכונות שתיארנו עד כה הן תכונות <u>מקומיות</u>, באשר הן מתייחסות להתנהגות המערכת ביחס לנש"מ או מחזור גבול מסויים.

תכונות המתייחסות ליחסים בין נש"מ או מחזורי גבול שונים, או למאפיינים של כל מסלולי המערכת, הן תכונות <u>גלובליות</u>. חקר תכונות אלה מנקודת ראות גיאומטרית החל בעבודתו של Poincaré בסוף המאה ה-19, ומהווה גם כיום תחום מחקר מרכזי בתורת המערכות הדינמיות.

נביא פה שתים מהתוצאות היסודיות בתחום, המאפשרות לנו במקרים מסוימים לאפיין קיום או העדר של מחזורי גבול. תוצאות אלו מתייחסות אך ורק למקרה של מערכות מצב <u>מסדר שני</u> (מהצורה $\dot{x} = F(x)$, כאשר F פונקציה חלקה דיה (גזירה ברציפות)).

משפט: משפט האינדקס של Poincaré.
נניח לשם פשטות כי הנש"מ הן מבודדות. אזי לכל מחזור גבול מתקיים

$$N = S + 1$$

N - מספר נש"מ (<u>שאינן נקודות אוכף</u>) אשר מוקפות על ידי מסלול מחזור הגבול.

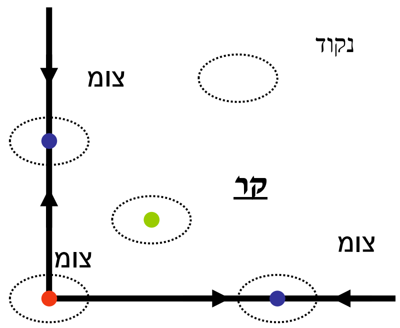
S - מספר נקודות האוכף המוקפות על ידי מחזור הגבול.

<u>הוכחה</u>: **ראו Strogatz Ch. 6.8**

מסקנות:

- מחזור גבול חייב להקיף לפחות נש"מ אחת.
- מחזור גבול אינו יכול להקיף נקודת אוכף בלבד.
- ההפרש בין מספר נקודות האוכף והנש"מ שאינן אוכף הוא 1.

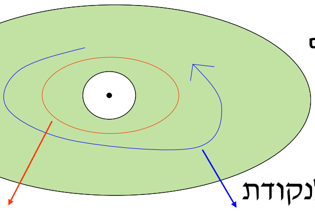
דוגמא: נראה שאין מחזורי גבול בבעית הארנבים והכבשים.



<u>משפט: משפט Poincaré-Bendixon.</u>

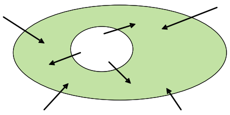
נניח שקיים תחום חסום וסגור (כלומר – ניתן להקיפו במעגל בעל שטח סופי) R <u>במישור</u>, כך ש:
(1) אינו מכיל נש"מ, (2) קיים מסלול שאינו יוצא מ- R. אזי קיים ב- R מסלול סגור (מחזורי).

<u>הוכחה</u>: **רשימת מקורות להוכחה מופיעה ב- Strogatz Ch. 7.3**



<u>קריאה עצמית</u>

ראה במפורש כי במערכות ליניאריות מסדר שני יתכן מסלול מחזורי שאינו מבודד מסביב לנקודת מרכז שבה שני הע"ע מדומים. פתרון המשוואות



$$x_1(0)=x_1\,,x_2(0)=x_2 \quad ; \quad \dot{x}_2(t)=-x_1 \quad ;$$

הוא

$$x_1(t)=r\cos(t+\phi) \quad ; \quad x_2(t)=r\sin(t+\phi)$$

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2} \quad ; \quad \phi=\tan^{-1}(x_2/x_1)$$

ברור מכאן כי לת"ה $(x_1,x_2)\to(ax_1,ax_2)$ יהיה פתרון מחזורי, המתאר מחזור גבול בעל מסלול קרוב כרצוננו למסלול המקורי.

הקושי המרכזי ביישום משפט זה קשור הוא במציאת מסלול שאינו יוצא מ- R.

דרך אפשרית להוכיח קיום מסלול כזה היא לבדוק האם קיימים עקומים הכולאים את מסלולי הזרימה – ראו איור תחתון. בדיקה זו אינה תמיד קלה לביצוע. אם קיימים עקומים כאלה, אזי הם יוצרים תחום כליאה שיכול לשמש גם בתור התחום הנדרש R ממשפט פואנקרה-בנדיקסון, כי בהכרח כל מסלול ב- R שכזה לא יכול לצאת מ- R.

<u>הערות:</u> (1) שימו לב כי משפט זה שולל את האפשרות להתנהגות כאוטית במערכות (רציפות) מסדר שני! זאת מכיוון שאם מסלול לא בורח לאינסוף או שואף לנש"מ, משפט זה גורר בהכרח שהוא יתכנס למסלול סגור, ולא יעשה משהו מורכב יותר. (2) אין למשפט זה מקביל בממדים גבוהים יותר. שימו לב שרק בשני ממדים מפריד מחזור גבול את המרחב לשני תחומים שאין ביניהם 'דיבור'. (3) שימו לב שהמשפט מדבר על "מסלול מחזורי" ולא "מחזור גבולי" – כלומר, גם אם מתקיימים תנאי המשפט לא מובטח כי המסלול המחזורי מבודד.

ד. פונקציות הפוטנציאל והכללותיה

i. מערכת גרדיאנט

נניח שניתן לכתוב מערכת משוואות דינמיות בצורה $\dot{x} = -\nabla V$, עבור פונקציה $V\left(x\right)$ כלשהי.

מערכת כזאת נקראת מערכת גרדיאנט, עם פונקציית פוטנציאל $V\left(x\right)$.

<u>משפט:</u> במערכות גרדיאנט אין מסלולים סגורים.

הוכחה: נניח שאנחנו במסלול סגור. נסמן ב- ΔV את השינוי ב- V אחרי סיבוב אחד במסלול שלוקח זמן T. מצד אחד, $\Delta V = 0$, מכיוון ש- V מקבלת ערך יחיד בכל נקודה. מצד שני,

$$\Delta V \triangleq V\left(x\left(T\right)\right) - V\left(x\left(0\right)\right) = \int_0^T \frac{dV}{dt}dt = \int_0^T \left(\nabla V^T \dot{x}\right)dt = -\int_0^T \left\|\dot{x}\right\|^2 dt < 0$$

לכל מקרה שבו $\dot{x} \neq 0$, כלומר המסלול אינו נקודה קבועה. הגענו לסתירה. ■

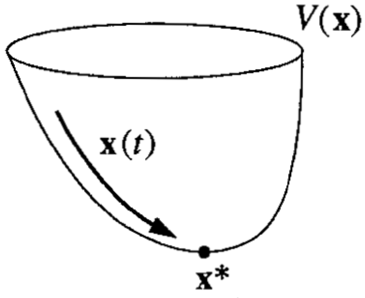
ii. פונקציית ליאפונוב (Lyapunov)

לעיתים, במערכות שאין להן שום קשר למכניקה, ניתן למצוא פונקציות שימושיות, דמויות-אנרגיה, שקטנות מונוטונית לאורך מסלולים במרחב הפאזה. אם פונקציית ליאפונוב קיימת, אז לא קיימים מסלולים סגורים במערכת, בדומה למערכת גרדיאנט.

<u>פונקצית ליאפונוב:</u> בהינתן מערכת $\dot{x} = F\left(x\right)$ ונש"מ **יחידה** x^*, נניח שניתן למצוא **פונקציית ליאופונוב**, כלומר פונקציה ממשית וגזירה ברציפות, $V\left(x\right)$, עם התכונות הבאות:

1. $V\left(x\right) > 0$, לכל $x \neq x^*$, ו- $V\left(x^*\right) = 0$.
2. $\dot{V}\left(x\right) < 0$, לכל $x \neq x^*$ (פונקציה מונוטנית יורדת).
3. $V\left(x\right) \to \infty$ כאשר $\left\|x\right\| \to \infty$.

<u>משפט</u> : אם למערכת קימת פונקצית ליאפונוב ביחס לנקודה x^*, אזי x^* היא נקודת יציבה אסימפטוטית גלובלית : לכל תנאי התחלה, $x\left(t\right) \to x^*$ כאשר $t \to \infty$. בפרט למערכת אין מסלולים סגורים. האינטואיציה לכך היא שכל המסלולים יורדים מונוטנית על הגרף של $V\left(x\right)$, לכיוון x^*.



הם לא יכולים להתקע בשום מקום אחר, אחרת V יפסיק להשתנות, בניגוד להנחה ש- $\dot{V}<0$.

<u>הוכחת המשפט – קריאה עצמית (רשות)</u>

נניח לשם פשטות כי הנש"מ נמצאת בראשית ($x^*=0$). ניקח כדור ברדיוס R (לצייר), ונסמן ב- m את הערך המינימלי של $V\left(x\right)$ על שפת הכדור. מכיוון ש- $V\left(x\right)$ רציפה ומתאפסת ב-0, קיים רדיוס r כך ש- $V\left(x\right)<m$ לכל $\left\|x\right\|<r$. מכיוון ש- $V\left(x\left(t\right)\right)$ יורדת מונוטונית, אם $\left\|x(t')\right\|<r$ אזי $\left\|x(t)\right\|<R$ לכל $t\geq t'$. מכיוון ש- R שרירותי הנש"מ יציבה ליאפונוב.

כעת נתבונן בתנאי התחלה שרירותי $x(t_0)=x_0$ ונראה כי $x(t)\to 0$. כיוון ש- $V\left(x\right)\to\infty$ עבור $\left\|x\right\|\to\infty$, קיים כדור ברדיוס $M>0$ שמחוץ לו $V(x)>V(x_0)$. כיוון ש- $V(x(t))$ יורדת מונוטונית, המסלולים נשארים בתוך הכדור, כלומר $\left\|x(t)\right\|\leq M$ עבור $t>t_0$.

מצד שני, כיוון ש- $V(x(t))$ יורדת וחסומה מלמטה ע"י 0, קיים גבול c וכן $V(x(t))\xrightarrow[t\to\infty]{}c$. $V(x(t))>c$. נניח בשלילה $c>0$. מרציפות הפונקציה נובע שקיים כדור ברדיוס $\varepsilon>0$ סביב הראשית שבתוכו $V<c$, ולכן $\left\|x(t)\right\|\geq\varepsilon$ לכל t. סה"כ קיבלנו $\varepsilon\leq\left\|x(t)\right\|\leq M$ עבור $t>t_0$.

כיוון שזהו תחום קומפקטי, $\dot{V}$ מקבל בו מקסימום, ומכאן $-K<0$ ולכן $\dot{V}\left(x\left(t\right)\right)<-K<0$

ולכן

$$V\left(x\left(t\right)\right)-V\left(x\left(t_0\right)\right)=\int_{t_0}^{t}\dot{V}dt<-K\left(t-t_0\right)\to-\infty$$

וזו סתירה, לכן $c=0$.

מצאנו כי $V(x(t))\xrightarrow[t\to\infty]{}0$. כעת, לכל $\varepsilon>0$, התחום $\varepsilon\leq\left\|x\right\|\leq M$ קומפקטי, לכן $V(x)$ מקבל בו מינימום $m>0$. מהגבול $V(x(t))\xrightarrow[t\to\infty]{}0$ נובע ש עבור t מספיק גדול, $V(x(t))<m$, ולכן $\left\|x(t)\right\|<\varepsilon$. מכאן $x(t)\to 0$. מש"ל.

<u>הערות</u>: (1) שימו לב שמצד אחד פונקציית ליאפונוב היא הכללה של פונקציית פוטנציאל במערכות גרדיאנט, ומצד שני, לפי ההגדרה שהבאנו במערכות עם פונקציית ליאפונוב יכולה להיות רק נש"מ יחידה בעוד במערכות גרדיאנט יכולות להיות מספר נש"מ או מסלולים שמתבדרים לאינסוף.
(2) לרוע המזל, אין דרך שיטתית לבנות את פונקציית ליאופונוב. בד"כ זקוקים לקצת "השראה אלוהית", אבל לפעמים ניתן לעבוד בצורה של "הנדסה לאחור". מדי פעם, פונקציות מהצורה של סכום של ריבועים עובדות, כמו בדוגמא הבאה.

<u>דוגמא 12</u>:

ע"י בנייה של פונקציות ליאופונוב,
הראו כי למערכת

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$$

אין מסלולים סגורים, וכי כל המסלולים שואפים לראשית $\left(0,0\right)$ כאשר $t \to \infty$.

iii. מערכות משמרות – קריאה עצמית

החוק השני של ניוטון $F = ma$, משמש מקור להרבה מערכות דינמיות חשובות מסדר שני.

במקרים מסויימים, ניתן להגדיר אנרגיה פוטנציאלית $V\left(x\right)$, כך ש- $F = -\nabla V$. למשל, עבור חלקיק שנע במימד אחד ללא חיכוך, נקבל את המשוואה

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$$

טריק ששווה לזכור – אם נכפיל את המשוואה ב- $\dot{x}$, נקבל ביטוי שניתן לרשום אותו כנגזרת מלאה בזמן של פונקציה

$$\begin{aligned} & m\ddot{x}\dot{x} + \frac{dV}{dx}\dot{x} = 0 \\ & \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V\left(x\right)\right] = 0 \end{aligned}$$

מכאן, עבור כל פתרון נתון $x\left(t\right)$, האנרגיה הכוללת, אותה נגדיר כ-

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V\left(x\right)$$

היא קבועה בזמן. אנרגיה זו נקראת כמות נשמרת, או קבוע תנועה. מערכות עבורן קיים קבוע תנועה, נקראות מערכות משמרות (conservative systems). מבחינה פיסיקלית, מערכות כאלה הן "חסרות חיכוך" – בניגוד למערכות גרדיאנט (או ליאפונוב) שהן "בעלות חיכוך"

באופן כללי יותר, ומדויק יותר, עבור מערכת $\dot{x} = F\left(x\right)$, **כמות נשמרת** מוגדרת כפונקציה $E\left(x\right)$ שהיא קבועה על כל המסלולים, כלומר

$$dE / dt = 0$$

בנוסף, אנו דורשים ש-$E\left(x\right)$ תהיה לא קבועה על כל קבוצה פתוחה של x, כדי להמנע מהגדרות טריוויאליות כמו $E\left(x\right) \equiv \text{constant}$, שיגרמו לכל מערכת להיות מערכת משמרת.

<u>משפט:</u> למערכת משמרת לא יכולות להיות נש"מ מושכות (יציבות).

הוכחה: נניח שקיימת נש"מ מושכת X^* במערכת משמרת. אז אוסף כל המסלולים $X\left(t\right)$ שנגמרים בה מקיימים $E\left(X\left(t\right)\right) = E\left(X^*\right)$. אבל אוסף זה ('אגן ניקוז') הוא קבוצה פתוחה, בסתירה לכך ש-$E\left(X\right)$ אינה קבועה על כל קבוצה פתוחה. ■

העובדה שמערכת משמרת תורמת רבות לניתוח התנהגותה.

דוגמא 10: נסתכל על חלקיק בעל מסה $m = 1$, שנע בבור פוטנציאל כפול, מהצורה

$$V\left(x\right) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

הכוח הפועל על החלקיק הוא $F\left(x\right) = -\frac{dV}{dx} = x - x^3$.

לכן, משוואות התנועה הן מהצורה

$$\ddot{x} = x - x^3$$

אם נסמן $y \equiv \dot{x}$, אז נקבל את הניסוח השקול

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

קיימות נש"מ ב- $\left(0,0\right)$, ו-$\left(\pm 1,0\right)$.

נגזור לקבל את היעקוביאן:

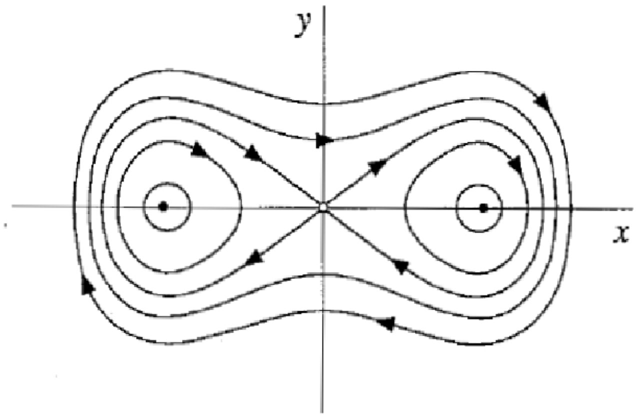
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lll} \left(0,0\right) & \Rightarrow \Delta = -1 & \Rightarrow \text{saddle-point} \\ \left(\pm 1,0\right) & \Rightarrow \tau = 0, \Delta = 2 & \Rightarrow \text{centers} \end{array}$$

נציב את נקודות שיווי המשקל, ונקבל ש-$\left(0,0\right)$ היא נקודת אוכף, בעוד ש-$\left(\pm1,0\right)$ הן נקודות צומת לא יציבות.

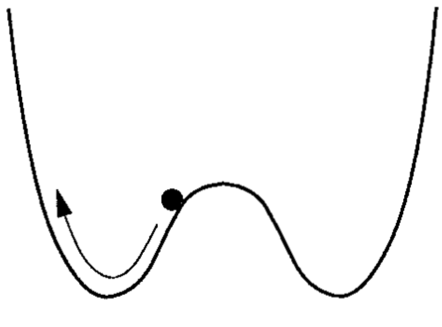
אבל מה לגבי התנהגות המערכת שלא ליד נקודות שיווי המשקל?
התשובה לכך פשוטה. מכיוון שהגודל

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+V\left(x\right)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4$$

קבוע בזמן לכל מסלול, זוהי למעשה צורת המסלולים במרחב!



כדי למצוא את כיוון החיצים בכל מסלול, מספיק להציב מספר נקודות מפתח.
שימו לב כי כל המסלולים במרחב מייצגים תנועה מחזורית (התנהגות נפוצה במערכות משמרות), מלבד המסלולים שחוצים את הראשית. נסו לחשוב, איזה התנהגות הם מייצגים?
העזרו בקצת אינטואיציה פיסיקלית למסלול החלקיק:



3. נספח: חומר העשרה

א. פתרון מערכת ליניארית עם זוג ערכים עצמיים מרוכבים

$$\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$$

נשים לב כי אם V_1 ו״ע בעל ערך עצמי λ_1 אז $V_2=\overline{V_1}$ ו״ע בעל ע״ע $\overline{\lambda_1}$, ולכן רכיב הפתרון הנובע משני ע״ע אלה הוא

$$X(t)=C_1V_1e^{(\alpha+j\beta)t}+C_2\overline{V_1}e^{(\alpha-j\beta)t} \qquad (*).$$

כדי לרשום את הפתרון במספרים ממשיים נשים לב לתכונה הבאה. אם $X(t)=X_R(t)+jX_I(t)$ פתרון מרוכב עבור $X_R(t),X_I(t)$ ממשיים, אזי $X_R(t)$ ו- $X_I(t)$ פתרונות ממשיים. נרשום את הפתרון המתאים לע״ע λ_1 בצורה

$$X_1(t)=V_1e^{(\alpha+j\beta)t}=\left(\mathrm{Re}(V_1)+j\,\mathrm{Im}(V_1)\right)\left(\cos\beta t+j\sin\beta t\right)e^{at}$$

נפרק פתרון זה לרכיב ממשי ומדומה

$$X_R(t)=\mathrm{Re}\left(V_1e^{(\alpha+j\beta)t}\right)=e^{\alpha t}\left(\mathrm{Re}(V_1)\cos\beta t-\mathrm{Im}(V_1)\sin\beta t\right)$$
$$X_I(t)=\mathrm{Im}\left(V_1e^{(\alpha+j\beta)t}\right)=e^{\alpha t}\left(\mathrm{Re}(V_1)\sin\beta t+\mathrm{Im}(V_1)\cos\beta t\right).$$

התרומה של שני ע״ע צמודים אלה לפתרון תהיה מהצורה $C_1X_R(t)+C_2X_I(t)$ (ערכי $C_{1,2}$ אינם בהכרח אלה המופיעים במשוואה (*), וצריכים להיות מחושבים מתנאי-התחלה) .

ב. שקילות הפתרון באמצעות פירוק ספקטרלי לפתרון האקספוננציאלי

נוכיח את השקילות של הפתרונות עבור מערכת דו-מימדית עם ערכים עצמיים ממשיים וללא ריבוי.

נסמן $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, כאשר λ_1,λ_2 הם הערכים העצמיים של A ,

וכן נסמן $T=\begin{pmatrix}V_1 & V_2\end{pmatrix}$ מטריצה מסדר 2×2 שעמודותיה הם הווקטורים העצמיים V_1,V_2.

כזכור, מטריצה (הפיכה!) זו מלכסנת את A ,

$$\Lambda=T^{-1}AT\,.$$

מאחר ו- T הפיכה, לכל X קיים Y יחיד המקיים $Y=T^{-1}X$.

נציב $X=TY$ במשוואות המצב ונקבל כי

$$T\dot{Y}=ATY \quad\Rightarrow\quad \dot{Y}=T^{-1}ATY \quad\Rightarrow\quad \dot{Y}=\Lambda Y$$

קיבלנו מערכת משוואות עבור Y שפתרונה הוא

$$Y(t)=e^{\Lambda t}\cdot Y_0$$

מכאן

$$X(t) = T \cdot Y(t) = T \cdot e^{\Lambda t} \cdot Y_0 = T \cdot e^{\Lambda t} \cdot T^{-1} X_0$$

ולכן

$$e^{At} = T \cdot e^{\Lambda t} \cdot T^{-1}$$

כמו כן

$$e^{\Lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \Lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

סך הכל

$$e^{At} = T \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot T^{-1}$$

$$X(t) = T \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot T^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} V_1 e^{\lambda_1 t} & V_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot T^{-1} X_0$$

נסמן $T^{-1} X_0 = C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ונקבל את צורת הפתרון השקולה

$$X(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}$$

מהוכחה זו ניתן גם לראות, שבפועל, שתי השיטות דומות: על מנת לחשב את
$e^{At} = T \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot T^{-1}$ יש למצוא הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של A.

ג. <u>פתרון מערכת לינארית במקרה של ריבוי גדול מ-1</u>

<u>תזכורת קצרה מתורת המטריצות:</u>

1. הגדרה: מטריצה A דומה למטריצה B אם קימת מטריצה הפיכה S כך ש $B = S^{-1} A S$
2. הגדרה: מטריצה לכסינה אם היא הדומה למטריצה אלכסונית
3. משפט: מטריצה לכסינה אמ"מ יש לה n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית
4. משפט: אם ל- A יש n ע"ע שונים אז היא לכסינה (ולכן בעלת n ו"ע בלתי תלויים לינארית)

שימו לב: לכסינות אינה גוררת ע"ע שונים. למשל מטריצה אלכסונית בעלת ע"ע שווים.

<u>ערך עצמי ממשי עם ריבוי</u>

ערך עצמי עם ריבוי, הוא מצב בו יש מספר ערכים עצמיים זהים להם ווקטור עצמי יחיד.

(הערה: יתכן גם מצב בו יהיו מספר ערכים עצמיים זהים עם ווקטורים עצמיים שונים. מקרה כזה יש לפתור לפי סעיף א'.)

במקרה שכאן הווקטור העצמי V_1 משותף ל m ערכים עצמיים (זהים) λ.

ניתן לקבל עוד $m-1$ וקטורים עצמיים <u>מוכללים</u> על ידי פתרון המשוואות הבאות:

$$\begin{gathered}\left(A-\lambda I\right)V_2=V_1\\ \left(A-\lambda I\right)V_3=V_2\\ \vdots\\ \left(A-\lambda I\right)V_m=V_{m-1}\end{gathered}$$

כאשר V_1 הוא הווקטור העצמי הרגיל שמקיים $\left(A-\lambda I\right)V_1=0$.

(הערה: הווקטורים העצמיים המוכללים פורשים מרחב מסדר m, אך הם אינם בהכרח אורתוגונליים. למשוואות שלעיל יש דרגת חופש לגבי כיוון הווקטור העצמי המוכלל. ניתן להסיר את דרגת החופש של הכיוון אם דורשים בנוסף אורתוגנליות.)

כל ווקטור עצמי מוכלל תורם את רכיב הפתרון הבא:

$$X_k(t)=\sum_{i=1}^{k}V_i\frac{t^{k-i}}{(k-i)!}e^{\lambda t}\qquad k=1,2,\dots,m$$

ניתן לבדוק שכל רכיב כזה מקיים את משוואות המערכת:

$$\begin{aligned}\dot{X}_k(t)&=\sum_{i=1}^{k}\lambda V_i\frac{t^{k-i}}{(k-i)!}e^{\lambda t}+\sum_{i=1}^{k-1}V_i\frac{(k-i)t^{k-i-1}}{(k-i)!}e^{\lambda t}=\sum_{i=1}^{k}V_i\frac{\lambda t^{k-i}}{(k-i)!}e^{\lambda t}+\sum_{i=2}^{k}V_{i-1}\frac{t^{k-i}}{(k-i)!}e^{\lambda t}=\\&=\lambda V_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t}+\sum_{i=2}^{k}(\lambda V_i+V_{i-1})\frac{t^{k-i}}{(k-i)!}e^{\lambda t}=AV_1\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t}+\sum_{i=2}^{k}AV_i\frac{t^{k-i}}{(k-i)!}e^{\lambda t}=\\&=A\sum_{i=1}^{k}V_i\frac{t^{k-i}}{(k-i)!}e^{\lambda t}=AX_k(t)\end{aligned}$$

<u>דוגמא</u>:

$$A=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}\qquad X_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=-1\quad V_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(A-\lambda I\right)V_2=V_1\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot V_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad V_2=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad V_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$X(t)=C_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-t}+C_2\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}e^{-t}$$

$$X(0)=C_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad C_1=1\quad,\quad C_2=1$$

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+t)\cdot e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix}$$

ד. מקרים גבוליים בניתוח יציבות נש״מ

הע״ע הנדרשים הם פתרונות המשוואה $\det(A-\lambda I)=0$.

נרשום את המשוואה בצורה מפורשת

$$0=\det(A-\lambda I)=\left(A_{11}-\lambda\right)\left(A_{22}-\lambda\right)-A_{12}A_{21}=\lambda^2-\tau\lambda+\Delta$$

$$\tau=A_{11}+A_{22}=\mathrm{Tr}\left(A\right) \qquad ; \qquad \Delta=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}=\mathrm{Det}\left(A\right)$$

ולכן

$$\lambda_{12}=\left(\tau\pm\sqrt{\tau^2-4\Delta}\right)\Big/2 .$$

הקווים התוחמים בין האזורים מתארים מצבי גבול:

- כאשר למערכת יש ערך עצמי אפס (הקו האנכי) - $\Delta=0$. במקרה זה המערכת סינגולרית, ויש לה אינסוף נקודות ש״מ.
- זוג ערכים עצמיים מדומים (הקו האופקי) - $\tau=0,\ \Delta>0$.
- זוג ערכים עצמיים ממשיים זהים (הקו הפרבולי) - $\tau^2-4\Delta=0$.

קווי הגבול מיצגים מגוון נוסף של מבנים במרחב המצב. לא ננתח את כל המבנים הטופולגיים הללו, אך ניתן שתי דוגמאות.

<u>צומת יציב מנוון</u> הוא מצב בו מתקבלים שני ערכים עצמיים שליליים <u>זהים</u> עם ווקטור עצמי משותף. זה מתאים למקרה שבו $\tau^2-4\Delta=0$ ו- $\tau<0$.

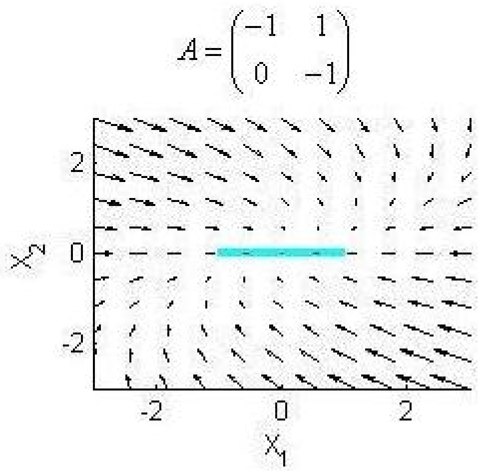
זהו מצב גבולי בין ספיראלה יציבה וצומת יציב.

נתבונן במקרה שבו $A=\begin{pmatrix}\lambda & k\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ ו- $\lambda<0$. במקרה זה הע״ע הוא λ והוקטור העצמי היחיד הו $\left(1,0\right)^T$ (מקרים אחרים ניתן להמיר למקרה זה – לא נדון בזאת).

הפתרון הוא

$$X_1(t)=\left(\left(0,1\right)^T+\left(1,0\right)^T kt\right)e^{\lambda t}$$
$$X_2\left(t\right)=\left(1,0\right)^T e^{\lambda t}$$

(פשוט בדקו ש $\dot{X}=AX$).



<u>נקודת מרכז</u> הוא מצב המתקבל כאשר יש זוג ע״ע מדומים $\pm j\beta$, המתרחש עבור $\tau = 0,\ \Delta > 0$.
זהו מקרה גבול בין ספיראלה יציבה לספיראלה בלתי יציבה.
הפתרון הוא

$$X(t) = C_1\left[\mathrm{Re}\left(V_1\right)\cos(\beta t) - \mathrm{Im}\left(V_1\right)\sin(\beta t)\right] + C_2\left[\mathrm{Im}\left(V_1\right)\cos(\beta t) + \mathrm{Re}\left(V_1\right)\sin(\beta t)\right]$$

בעקבות שינוי מנקודת שיווי המשקל, המערכת לא תחזור לנקודת שיווי המשקל אך גם לא תברח ממנה ולכן זהו שיווי משקל <u>אדיש</u> (ניטראלי).