

## אותות ומערכות ב' - מועד א תשע"ח 10.7.18

גרסה מספר: 8745621478

שם הסטודנט \_\_\_\_\_

ת.ז. \_\_\_\_\_

סטודנט/ית יקר/ה,

המבחן כולל: 17 שאלות אמריקאיות ו- 4 שאלות פתוחות  
ניקוד: 4 נקודות לכל שאלה אמריקאית, 80 שאלות לכל שאלה פתוחה  
חומר עזר: מחשבון

**יש לענות על השאלות הפתוחות על גבי טופס המבחן בלבד. את מחברות הטיוטה לא מגישים, ואין להן כל תוקף לבדיקת המבחן או לערעור.**

אנא קרא/י בתשומת לב את ההוראות:

- הדבק/י את מדבקת הברקוד במקום המיועד לכך. (במידה ואין בידך מדבקה אנא רשום את מספר ת.ז. במקום המיועד)
- יש למלא את טופס התשובות בעט כדורי בלבד על ידי סימון  ברור!
- יש לסמן תשובה אחת בלבד, סימון שתי תשובות כנכונות תחשב כשגיאה גם אם אחת מהן נכונה.
- בכל מקרה של אי התאמה בין טופס הקידוד לסימון בשאלון הבחינה - טופס הקידוד הוא הקובע.

**משך הבחינה: 3 שעות**

**ב ה צ ל ח ה !!!**

אני (שם ומשפחה) \_\_\_\_\_ ת.ז. \_\_\_\_\_ נבחן/ת בבחינה זו, מצהיר/ה כי לא אעתיק ולא אשתמש באמצעים המנוגדים לטוהר הבחינות בטכניון.

חתימה \_\_\_\_\_ .

מחלת החצבת היא מחלה מדבקת. לצורך שאלה זו:

- תינוקות נולדים מחוסנים למחלה בתקופת החיים הראשונה שלהם, בזכות נוגדנים שמגיעים מהשלייה ומההנקה.
- בשלב כלשהו, חיסון מולד זה עובר.
- מי שחולה בחצבת ומתאושש נשאר מחוסן למחלה.

המשוואות הבאות מתארות את התפשטות מחלת החצבת באוכלוסייה:

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dT} &= B - \delta M - \mu M \\ \frac{dS}{dT} &= \delta M - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dT} &= \beta SI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dT} &= \gamma I - \mu R\end{aligned}$$

ביחרו את המשפט הנכון ביותר:

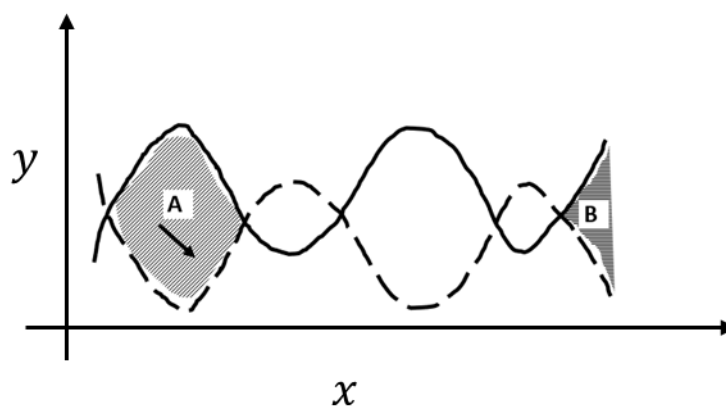
- B מייצג את קצב התמותה,  $\delta$  מייצג את קצב ההדבקה,  $\mu$  מייצג את קצב ההחלמה
- B מייצג את קצב הילודה,  $\delta$  מייצג את קצב סיום החיסון המולד,  $\mu$  מייצג את קצב התמותה
- B מייצג את קצב ההדבקה,  $\delta$  מייצג את קצב ההחלמה,  $\mu$  מייצג את קצב הילודה
- B מייצג את קצב סיום החיסון המולד,  $\delta$  מייצג את קצב התמותה,  $\mu$  מייצג את קצב ההדבקה
- B מייצג את קצב ההחלמה,  $\delta$  מייצג את קצב הילודה,  $\mu$  מייצג את קצב סיום החיסון המולד

2.

באיור שלפניכם מוצג מרחב הפאזה של מערכת דינמית דו מימדית.

$$\frac{dx}{dt} = a_1 y - a_2 \sin x - a_3$$
$$\frac{dy}{dt} = b_1 y - b_2 \sin x - b_3$$

כאשר  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  הם קבועים כלשהם.



הקו הרצוף מייצג את האזורים במרחב בהם מתקיים  $\frac{dx}{dt} = 0$

הקו המרוסק מייצג אזורים במרחב בהם מתקיים  $\frac{dy}{dt} = 0$

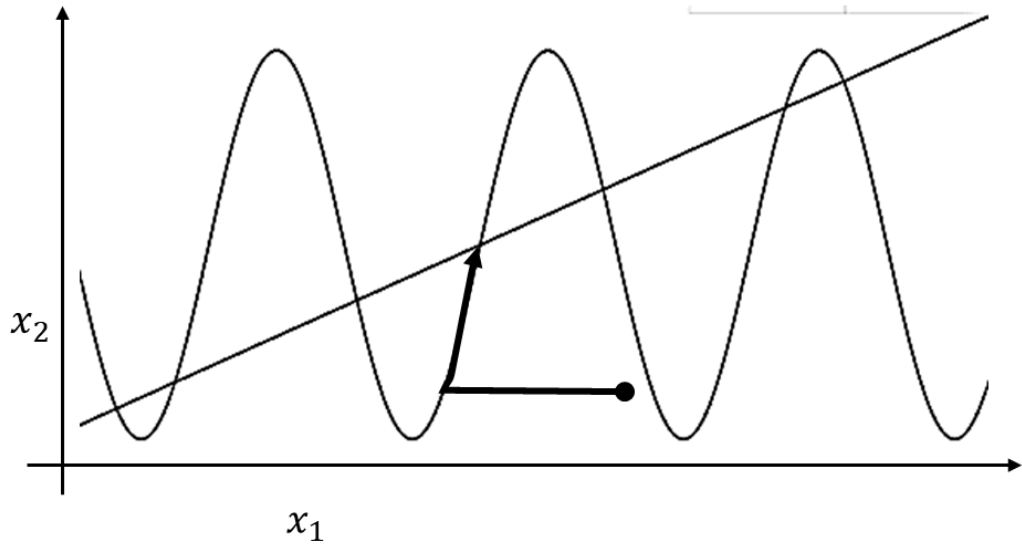
נתון כיוון הזרימה במרחב באזור A. מהו כיוון הזרימה באזור B?

- א. ימינה ולמטה
- ב. ימינה ולמעלה
- ג. שמאלה ולמטה
- ד. שמאלה ולמעלה
- ה. לא ניתן לדעת מהנתונים.

3.

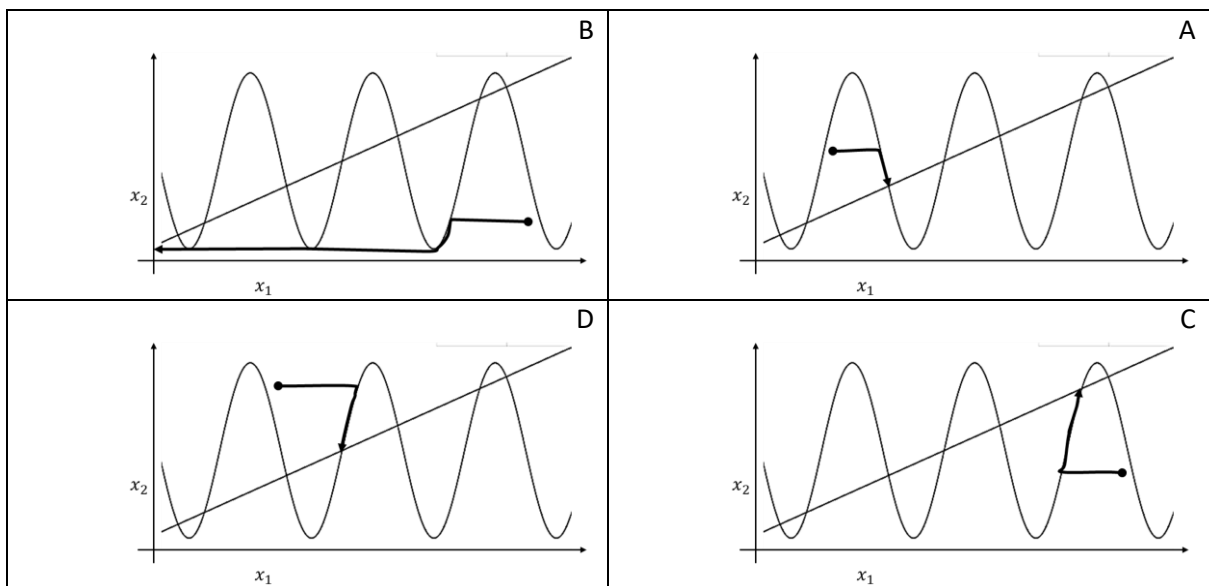
נתון שבמערכת הבאה מתקיימת הפרדת זמנים: השינוי במשתנה  $x_1$  מהיר הרבה יותר מהשינוי במשתנה  $x_2$ . באיור מוצגים עקומי אפס של  $x_1$  (הקו הסינוסואידלי) ושל  $x_2$  (הקו הליניארי).

נתון מסלול אחד במרחב הפאזה:



מבין ארבעת המסלולים המוצגים באיורים A-D, אילו מסלולים אפשריים?

**הערה: בכל המסלולים התנועה היא בכיוון האופקי ולאורך הקו הסינוסואידלי בלבד.**



- א. מסלולים A ו-B בלבד.
- ב. מסלולים C ו-D בלבד.
- ג. מסלול A בלבד.
- ד. מסלול C בלבד.
- ה. כל המסלולים אפשריים.

מערכת דינאמית בדו-מימד מוגדרת ע"י המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_1x_2 - 2x_2 \\ -4x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

בדקו האם נקודה  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  היא נקודת שיווי משקל של המערכת. אם כן – סווגו אותה, אם לא – ציינו זאת:

- א. זאת לא נקודת שיווי משקל
- ב. ספירלה יציבה
- ג. ספירלה לא יציבה
- ד. צומת לא יציבה
- ה. אוכף

5

נתונה המשוואה:

$$\dot{x} = x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

נתון כי  $x(0) = 6$ .

בצעו קירוב לינארי לנקודת השבת הקרובה, ומצאו את הערך המקורב של  $x(1)$  לפי קירוב זה

- א.  $4 + 5e^{11}$
- ב.  $6 + e^{11}$
- ג.  $4 + 2e^7$
- ד.  $2e^7$
- ה.  $5e^{11}$

נתונה המערכת הבאה:

$$\frac{dx}{dt} = -qx + u$$

$$x(0) = x_0$$

כאשר  $u$  לא תלוי בזמן.

כמו כן ידוע כי:

$$x(1) = 3$$

$$x(2) = 3$$

מה ניתן להגיד בוודאות על  $u, q, x_0$ ?

- א.  $x_0 = 3, u = 3, q = 3$   
 ב.  $x_0 = 3, u = 1, q = 1$   
 ג.  $x_0 = 3, u = 1, q = 3$   
 ד.  $x_0 = 3, u = 3, q = 1$   
 ה. לא ניתן לדעת בוודאות אף אחד מהם

נתונה המערכת הדו מימדית הבאה:

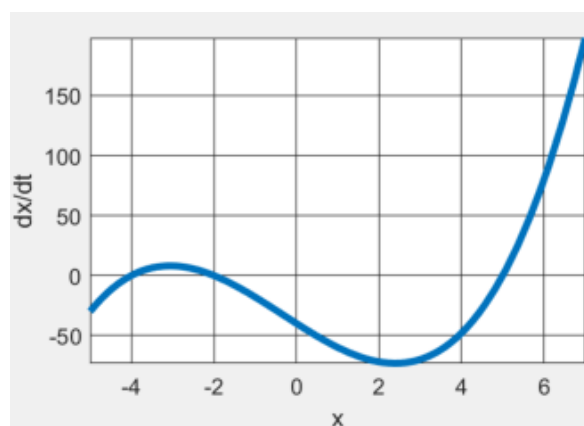
$$\dot{x} = Ax$$

ידוע ש**כל** תנאי ההתחלה המובילים להתכנסות המערכת לנקודת השבת ממוקמים לאורך קו ישר במרחב הפאזה. איזו מטריצה  $A$  יכולה להתאים למצב הזה?

- א.  $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$   
 ב.  $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$   
 ג.  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$   
 ד.  $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   
 ה. המצב הזה בלתי אפשרי.

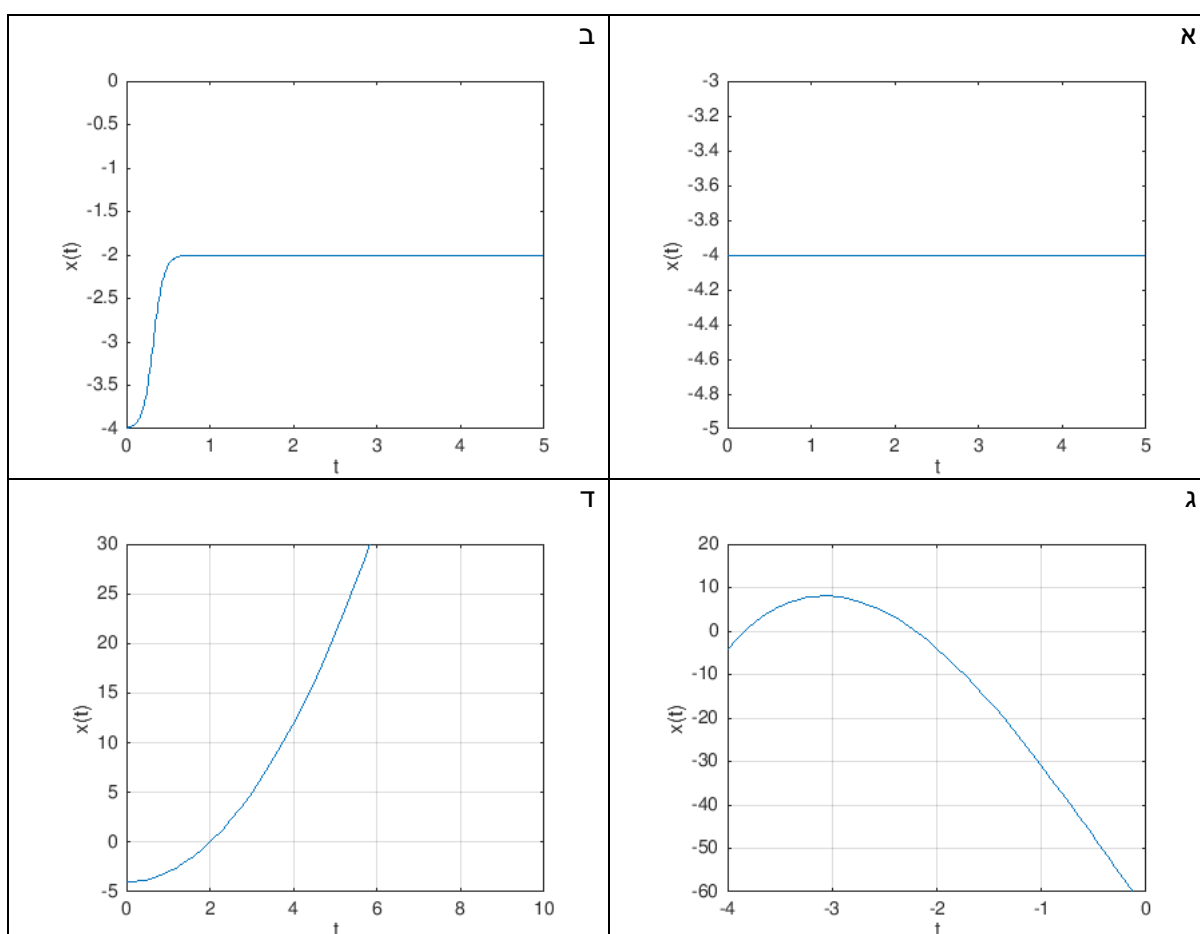
נתונה המערכת הדינמית הבאה

$$\frac{dx}{dt} = (x + 4)(x + 2)(x - 5)$$



בהנתן תנאי ההתחלה:  $x(0) = -4$

איך יראה הפתרון  $x(t)$ ?



נתון כי הפונקציה  $X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}$  היא פתרון של מערכת עבודה מתקיים

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad \text{ו-} \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = 1.$$

מצאו את המטריצה A ואת הווקטורים העצמיים המתאימים.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \dots \text{א.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots \text{ב.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \dots \text{ג.}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dots \text{ד.}$$

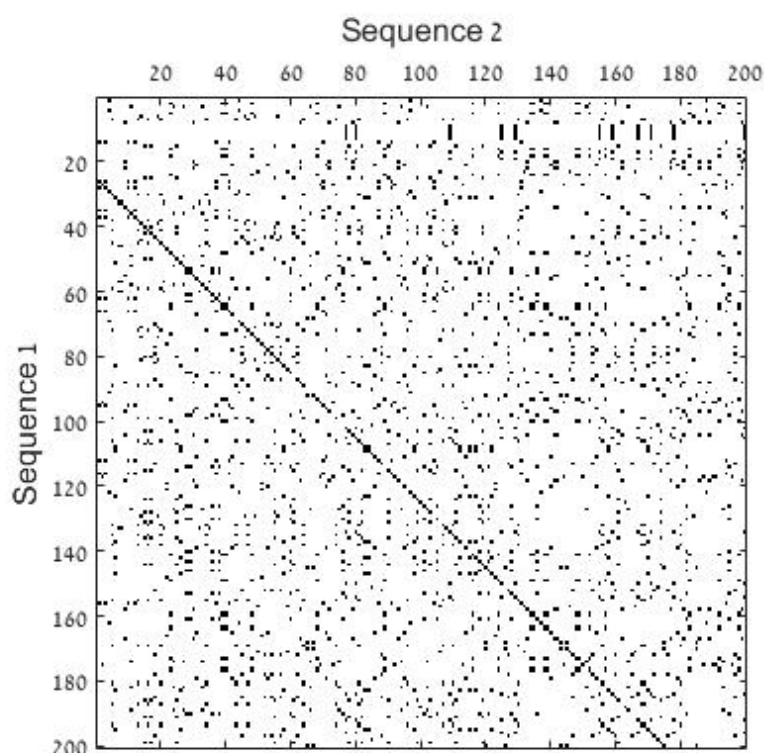
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \dots \text{ה.}$$



10. איזה מהמשפטים הבאים נכון לגבי תיקון Bonferroni?

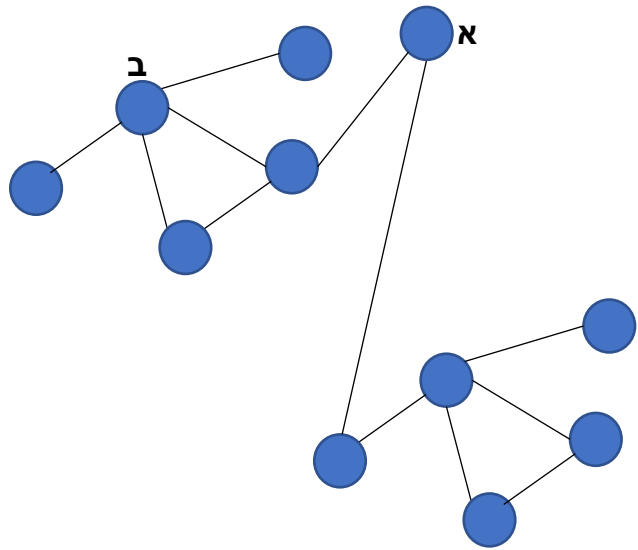
- א. משנים את הקריטריון למובהקות לפי מספר ההשוואות
- ב. בתיקון בונפרוני, משתמשים ברנדומיזציה של התוצאות
- ג. התיקון מגדיל את מספר הטעויות מסוג 1.
- ד. התיקון משפיע על סטיית התקן של ההשוואות.

11. נתונה מטריצת דמיון של שני רצפים של חלבונים (dot plot). מה ניתן ללמוד ממנה על העימוד (alignment) של שני הרצפים?



- א. הרצפים לא באותו אורך.
- ב. הדמיון בין רצף seq2 ל-seq1 מתחיל במיקום 25 של רצף seq2.
- ג. הדמיון בין רצף seq2 ל-seq1 מסתיים במיקום 180 של רצף seq2.
- ד. הדמיון בין רצף seq2 ל-seq1 מסתיים במיקום 200 של רצף seq2.

12. לפניכם משפטי השוואה בנוגע לדרגה (degree) והמרכזיות (centrality) של שני הצמתים המסומנים באותיות ברשת. בחרו במשפט ההשוואה הנכון ביותר.



- א. צומת א הוא בעל דרגה ומרכזיות גבוהים יותר משל צומת ב.
- ב. צומת ב הוא בעל דרגה ומרכזיות גבוהים יותר משל צומת א.
- ג. צומת א הוא בעל דרגה גבוהה יותר משל צומת ב; צומת ב הוא בעל מרכזיות גבוהה יותר משל צומת א.
- ד. צומת ב הוא בעל דרגה גבוהה יותר משל צומת א; צומת א הוא בעל מרכזיות גבוהה יותר משל צומת ב.

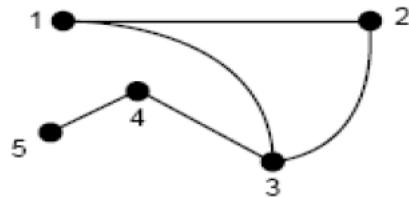
13. איזה מהבאים **אינו** יכול לסייע בקביעת מספר האשכולות ב-kmeans לצורך זיהוי תתי-קבוצות של חולים במחלה עליה נאסף מידע גנומי וקליני רב?

- א. אשכול היררכי (hierarchical clustering)
- ב. ניתוח גורמים ראשיים (PCA)
- ג. חישוב מטריצת הדמיון בין המדדים.
- ד. חישוב מטריצת הדמיון בין הדוגמאות.
- ה. כל הנ"ל יכולים לסייע בקביעת מספר האשכולות.

14. חוקר ביצע ניתוח גורמים ראשיים (PCA) על נתונים רב מימדים ומצא שני גורמים ראשיים המסבירים את רוב השונות של הנתונים. לאחר ביצוע האנליזה התברר לו שחלה טעות בקידוד הנתונים, וכדי לתקנה יש להכפיל את כלל הנתונים במספר 3.25. איך צפוי התיקון להשפיע על תוצאות האנליזה?

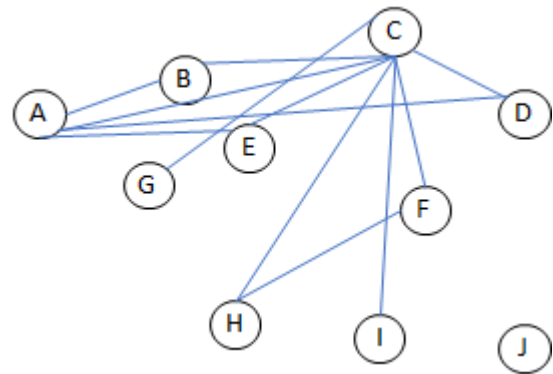
- התיקון לא ישפיע על תוצאות האנליזה, כי המקדמים (coefficients) נשארים זהים.
- התיקון ישנה את התוצאות, כי בעקבותיו משתנה המשקל היחסי של כל מימד.
- התיקון ישנה את התוצאות רק אם PCA בוצע על נתונים מגולמיים, אך לא אם PCA בוצע על הנתונים הגולמיים.
- התיקון ישנה את התוצאות רק אם PCA בוצע על הנתונים הגולמיים, אך לא אם PCA בוצע על נתונים מנורמלים.

15. איזו מטריצת סמיכות יכולה לתאר את הגרף הבא?



<p>א</p> $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	<p>ד</p> $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
<p>ב</p> $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	<p>ה</p> $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
<p>ג</p> $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	

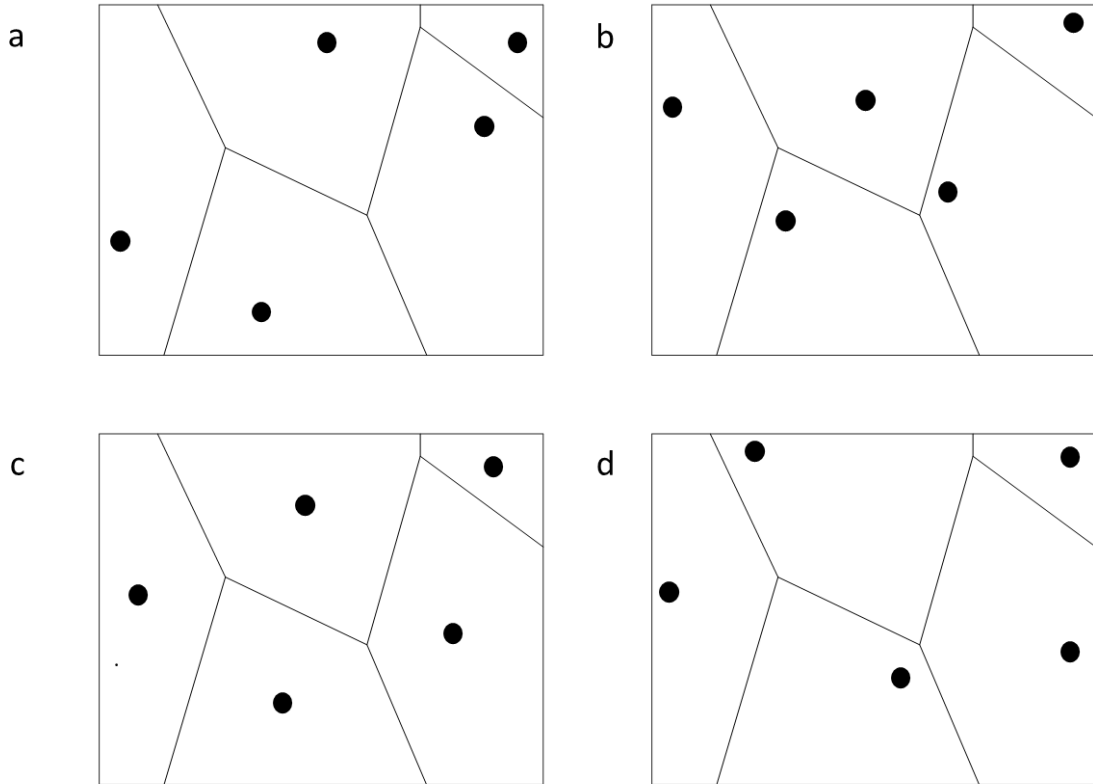
16. בהתייחס לגרף הבא, איזה מהמשפטים אינו נכון?



- א. הצמתים A ו-C הם האבים (hubs)
- ב. J הוא singleton
- ג. A, B, C הם קליקה
- ד. C, H ו-F הם קליקה.
- ה. D אינו hub

17. לפניכם 4 תרשימים שמכילים 5 אשכולות . הקווים מגדירים את הגבולות בין האשכולות והנקודות מתארות את הצנטרואידים שלהם.

איזה מבין התרשימים יכול לתאר מיקום נכון של הצנטרואידים המתקבלים מאשכול בשיטת kmeans?



a. א.

b. ב.

c. ג.

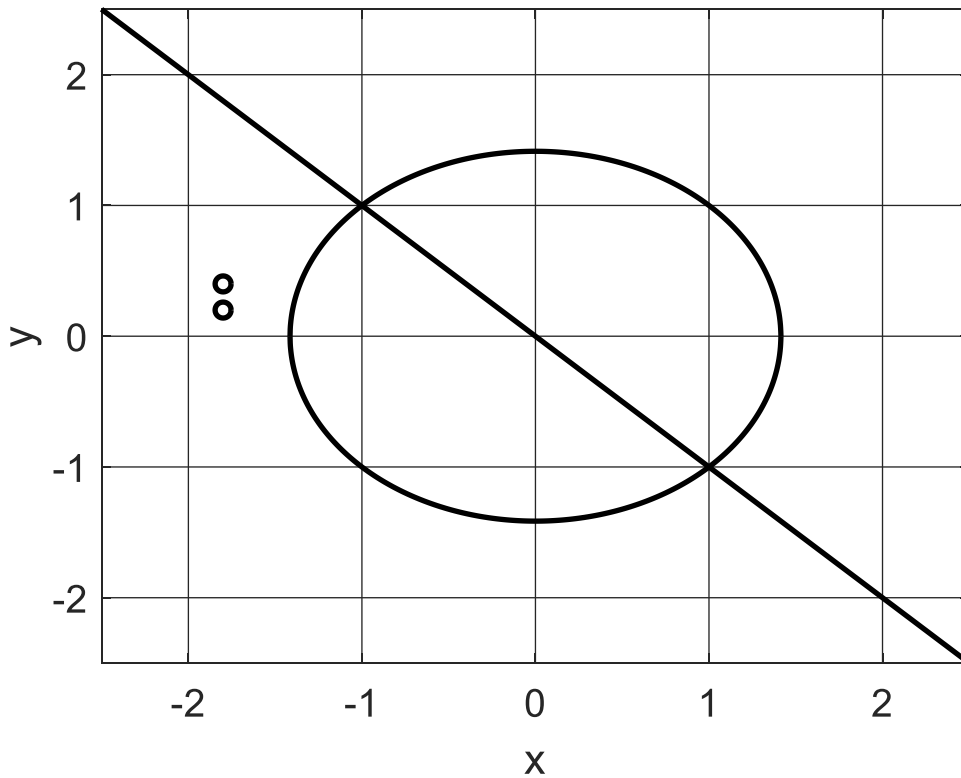
d. ד.

ה. כל התרשימים אפשריים.

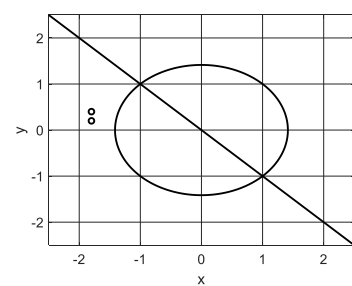
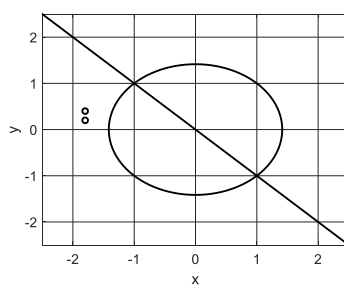
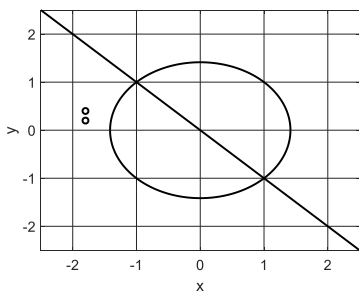
נתונה המערכת הדינמית הבאה:

$$\frac{dx}{dt} = -x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 2$$



1. באיור מסומנים שני עיגולים קטנים. בצעו לינאריזציה למערכת סביב נקודת השבת הקרובה ביותר לעיגולים אלו. רישמו את היעקוביאן וסווגו את נקודת השבת.
2. נתון כי המסלולים שמתחילים בשני העיגולים הקטנים מסתיימים במקומות שונים מאוד במרחב הפאזה. ציירו את שני המסלולים על גבי האיור המצורף (לרשותכם טיטות של איור זה למטה)



מקום לשאלה פתוחה 1

מקום לשאלה פתוחה 1

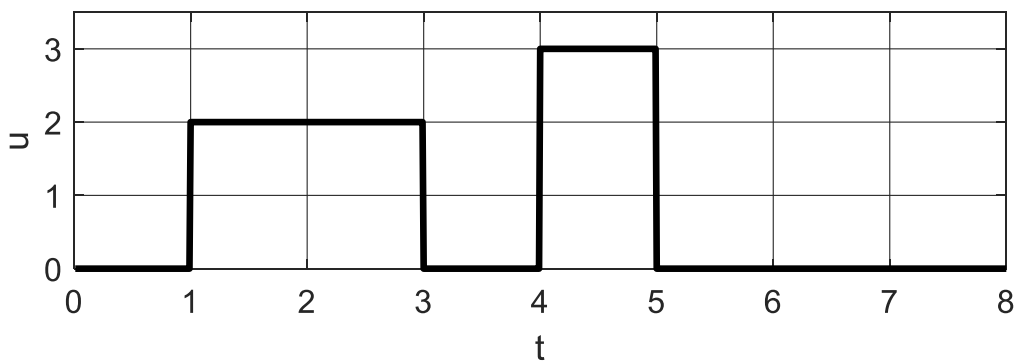
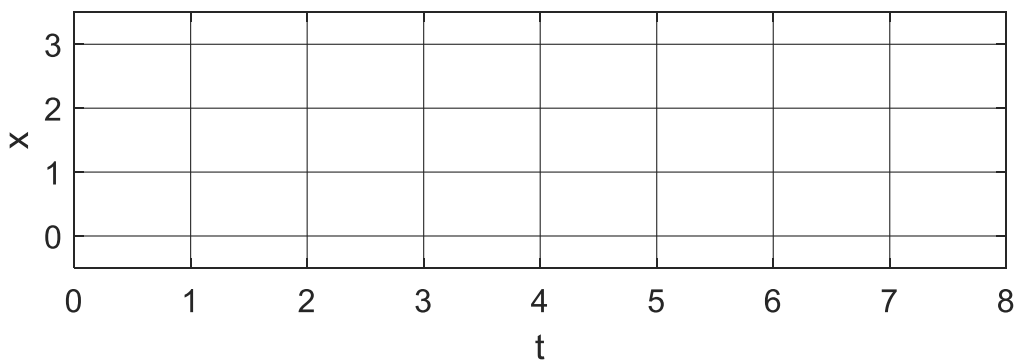


פתוחה 2

נתונה המערכת הדינמית הבאה:

$$\begin{aligned}\tau \frac{dx}{dt} &= -x + u(t) \\ x(0) &= 0 \\ \tau &= 2\end{aligned}$$

כמו כן נתון הקלט  $u(t)$ :



- א. חשבו את הערכים הבאים:  $x(3), x(4)$ . נא להראות את אופן החישוב!  
ב. ציירו את  $x(t)$  בגרף העליון.

מקום לשאלה פתוחה 2

מקום לשאלה פתוחה 2

	<p>לפניך רשת של סטודנטים אשר נפגשים על בסיס יומיומי בהרצאות השונות באוניברסיטה (כל צומת מייצגת סטודנט, קשת מקשרת בין הסטודנטים שיכולים להיפגש).</p> <p>ביום בהיר אחד, אחד הסטודנטים נדבק בוירוס.</p> <p>הניחו כי מספיק להימצא באותו חדר עם הסטודנט המודבק על מנת שהוירוס יעבור, וסטודנט מתחיל להדביק בוירוס יום אחרי שהוא נדבק בעצמו.</p> <p>א. מיהו הסטודנט אשר יביא למספר מודבקים הגדול ביותר תוך יום אחד לפי הרשת הנתונה.</p> <p>ב. האם יש סטודנט אשר לא יוכל להביא להדבקה כלל?</p>
	<p>כעת נניח כי לגרף יש כיווניות, כלומר הדבקה ע"י סטודנט א ל-ב' יכולה לקרות אך ורק אם קיימת קשת מכוונת היוצאת מסטודנט א אל סטודנט ב</p> <p>ג. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף א?</p> <p>ד. נניח כי הסטודנט שנדבק הוא אכן הסטודנט שבחרתם בסעיף א.</p> <p>עברו יומיים והסטודנט פנה לעזרה רפואית. לתרופה נגד הוירוס לוקח יומיים כדי למנוע הדבקה עתידית, האם יש סטודנט שלא יודבק כלל?</p>

### מקום לשאלה פתוחה 3

#### פתוחה 4

בסעיפים הבאים מתוארות תכונות שונות המאפיינות data של פרופיל ביטוי גנים במקבץ של דוגמאות. אופי הנתונים כפי שמתואר יכול להוות בעיה עבור אלגוריתם k-means. עבור כל תכונה, תאר כיצד תשפיע התכונה על האלגוריתם והצע פתרון אפשרי שיאפשר לאלגוריתם להיות עמיד לבעייתיות זו.

א. קלסטור של דוגמאות לפי פרופיל ביטוי הגנים שלהם בהנתן שכאשר מבצעים קלסטור של גנים לפי פרופיל הביטוי שלהם בדוגמאות ניתן בברור לראות כי הם מחולקים לתתי-קבוצות של גנים בעלות גודל מאוד שונה. כאשר הגנים המאפיינים כל קבוצה מראים קורלציה גבוהה ביותר בינם לבין עצמם.

השפעה:

פתרון:

ב. קלסטור של דוגמאות לפי פרופיל ביטוי גנים השונים זה מזה באופן משמעותי בטווח הביטוי

השפעה:

פתרון: