

אותות ומערכות - מועד א' תשע"ז 17.7.17

גרסה מספר: 369545717

שם הסטודנט _____

ת.ז. _____

סטודנט/ית יקר/ה,

המבחן כולל: 20 שאלות סגורות ו-4 שאלות פתוחות.

ניקוד: 4 נקודות לכל שאלה סגורה, 5 נקודות לכל שאלה פתוחה.

חומר עזר מותר: מחשבון

אנא קרא/י בתשומת לב את ההוראות:

- הדבק/י את מדבקת הברקוד במקום המיועד לכך. (במידה ואין בידך מדבקה אנא רשום את מספר ת.ז. במקום המיועד)
- יש למלא את טופס התשובות בעט כדורי בלבד על ידי סימון ברור!
- יש לסמן תשובה אחת בלבד, סימון שתי תשובות כנכונות תחשב כשגיאה גם אם אחת מהן נכונה.
- בכל מקרה של אי התאמה בין טופס הקידוד לסימון בשאלון הבחינה - טופס הקידוד הוא הקובע.

משך הבחינה: שלוש שעות

ב ה צ ל ח ה !!!

אני (שם ומשפחה) _____ ת.ז. _____ נבחן/ת בבחינה זו, מצהיר/ה כי לא
אעתיק ולא אשתמש באמצעים המנוגדים לטוהר הבחינות בטכניון.

חתימה _____

17.7.17 אותות ומערכות

1. חוקרת הקליטה את מתח הממברנה בנוירונים. היא גילתה כי המתח, המסומן על ידי x , מבצע תנודות בתדר של 2 Hz, ללא דעיכה באמפליטודה. איזו משוואה יכולה לתאר את פעילות הנוירונים הנ"ל?

א. $\ddot{x} = -\dot{x} - 16\pi^2 x$

ב. $\ddot{x} = -16\pi^2 x$

ג. $\ddot{x} = -\dot{x} - 4x$

ד. $\ddot{x} = -4x$

ה. לא ניתן לתאר באמצעות משוואה דיפרנציאלית פעילות שאיננה דועכת עם הזמן

2. נתונה המערכת הדינמית הבאה (תרשים 1)

בהנתן תנאי ההתחלה $x(0) = 0.5$, איך יראה הפתרון $x(t)$?

א. תרשים 2

ב. תרשים 3

ג. תרשים 4

ד. תרשים 5

ה. תרשים 6

3. כל המשפטים הבאים נכונים פרט ל:

א. פתרון נומרי עוזר במקרים בהם קשה להגיע לפתרון אנליטי

ב. בפתרון נומרי $x(t + \Delta t)$ תלוי ב $x(t)$ לכל t

ג. ככל ש Δt קטן יותר, כך הפתרון הנומרי המתקבל מדויק יותר

ד. בפתרון נומרי מבצעים קירוב לינארי סביב נקודת שיווי משקל

ה. פתרונות נומריים שונים מתקבלים עבור תנאי התחלה שונים

4. נתונה מערכת לינארית דו מימדית. $\dot{x} = Ax$

מהו המשפט הנכון ביותר?

- א. הוקטורים העצמיים בהכרח זהים לעקומי האפס
- ב. אם מתקיים, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ אז לפחות אחד הוקטורים העצמיים מתלכד עם אחד מעקומי האפס
- ג. וקטור עצמי לעולם לא יהיה זהה לעקום אפס
- ד. ניתן לחשב את עקומי האפס בלי לדעת את הוקטורים העצמיים

5. מערכת דינאמית לינארית מוגדרת ע"י משוואה דפרנציאלית $\dot{x} = -10x + u(t)$ (הזמן נמדד בשניות)

הקלט $u(t)$ נתון ע"י סדרה של שמונה פולסים בעוצמה הולכת וגדלה. הפולסים הם בעלי רוחב קבוע של 0.01 שניות והפסקה של 0.99 שניות בין פולס לפולס. הפולס הראשון מתחיל ב $t = 0$ והפולס האחרון מסתיים ב $t = 7.01$. עוצמת הפולס הראשון היא 3.0, השני - 4.0 וכן הלאה, עד שעוצמת הפולס האחרון היא 10.0.

(ראו תרשים 7)

נניח תנאי התחלה $x(0) = 0$ חישבו בקירוב את $x(t = 8)$ רמז: עבור פונקציה כלשהי $f(z)$ שלא משתנה הרבה בתחום: $s < z < s + 0.01$

$$\int_s^{s+0.01} f(z) dz \approx 0.01 f(s)$$

רמז נוסף: $10^{-5} + 10^{-4} \approx 10^{-4}$

- א. $3e^{-10}$
- ב. $10e^{-10}$
- ג. $0.1e^{-10}$
- ד. $0.01e^{-10}$
- ה. $0.03e^{-10}$

6.

נתונה מערכת דינמית

$$\dot{x} = a(x - 3) + y - 28$$

$$\dot{y} = (y - 28)(x - 3 + b)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 28 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי הנקודה היא נקודת שבת.

מהו התנאי לכך שנקודת שבת זו תהיה נקודת אוסף?

א. $a > 0$

ב. $a < 0$

ג. $ab > 0$

ד. $ab < 0$

ה. $b > 0$

7.

נתונה המערכת הבאה:

$$\dot{x} = -8x + 4y$$

$$\dot{y} = 2x - 6y - u$$

ניתן לבדוק כי כאשר $u = 0$, המערכת חוזרת לנקודת שיווי המשקל שלה בערך לפי קבוע זמן $\tau = 0.25$

כעת נוסיף משוב מהצורה $u = kx$.

מה יקרה כאשר נגדיל את k מאפס ל3?

א. קבוע הזמן יגדל בהדרגה, ולבסוף יגיע לבערך 0.4

ב. קבוע הזמן יגדל בהדרגה, וכאשר יגיע לבערך 0.3 יתחילו תנודות.

ג. קבוע הזמן יקטן בהדרגה, ולבסוף יגיע לבערך 0.19

ד. קבוע הזמן יקטן בהדרגה, וכאשר יגיע לבערך 0.14 יתחילו תנודות

8. נתונה מערכת דינמית דו מימדית

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x$$

כמו כן ידוע כי $\begin{pmatrix} -9 \\ -9 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי.

איזה מהאיורים הבאים (תרשים 8) של מרחב הפאזה (הצירים הם x_1, x_2) מתאר את המערכת?

- A .א
- B .ב
- C .ג
- D .ד

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F(x, y)$$

9. נתונה מערכת דינמית דו-מימדית מהצורה. באיור שלפניכם (תרשים 9) מסומנים שני עקומי האפס (אחד בקו מלא, ואחד מקווקו), אך לא ידוע איזה שייך ל $\dot{x} = 0$, ואיזה שייך ל $\dot{y} = 0$. נתבונן במסלול במרחב הפאזה המתחיל בנקודה A והעובר לאחר מכן בנקודה B.

אילו מבין הנקודות הבאות יכולות להשתייך להמשך המסלול?

- A. D, C
- B. E, D
- C. E, C
- D. E, D, C
- H. C בלבד

10. לפניכם מרחב פאזה **(תרשים 10)**, ובו מסומנים מספר מסלולים :

מסלולים אלו מתארים תנאי התחלה שונים של המערכת הדינמית הבאה :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

מיהם f, g ?

א. $f = (x^3 - 2x - y)$

$g = -0.01(x + y)$

ב. $f = 0.01(x^3 - 2x - y)$

$g = -(x + y)$

ג. $f = (x^3 - 2x - y)$

$g = -(x + y)$

ד. $f = -(x + y)$

$g = 0.01(x^3 - 2x - y)$

ה. $f = -0.01(x + y)$

$g = (x^3 - 2x - y)$

11. לפניך **(תרשים 11)** אפשרויות לחלוקה של דוגמאות בין שתי קבוצות. כל צורה מייצג אזור

במרחב דו-מימדי המאוכלס בדוגמאות בפיזור אחיד. הצבע של כל צורה מייצג את תיוג

הדוגמאות באזור זה לאחת משתי קבוצות.

הניחו שהסקלות של שני הצירים שוות.

איזו חלוקה מבין הבאות הכי סביר שתתקבל כפלט של אלגוריתם k-means?

א. A

ב. B

ג. C

ד. D

12. נתונה מטריצת החלפה הבאה :

	A	B	C
A	4	0.5	-2
B	0.5	3	-1
C	-2	1-	1

חשב על פי המטריצה את הדמיון בין שתי המחרוזות הבאות :

ABCABCABC

ABCCBAABA

א. 12

ב. 6

ג. 3

ד. אף תשובה איננה נכונה

ה. אי אפשר לחשב דמיון מכיוון שמטריצת ההחלפה אינה תקינה

13. בהינתן הגרף דו-ממדי של קבוצת נתונים **(תרשים 12)**, כל המשפטים הבאים נכונים **פרט ל:**

א. ביצוע K-means על הנתונים עם או ללא הנקודה המוקפת בעיגול, בהכרח יוביל לשיוך

כל הנתונים האחרים לאותם קלאסטרים להם היו שייכים במקור

ב. הוצאה של נקודה היושבת ב-centroid של כל הנתונים לא ישפיע על מהו השיוך

האופטימלי של כל הנקודות לחברות ב-2 קלאסטרים

ג. בהינתן שהנקודה המוקפת בעיגול משתתפת ב-K-means, ו $K=2$ לא תידרש יותר

מהרצה אחת **(מספר איטרציות)** של האלגוריתם להגיע לחלוקה אופטימלית (מינימום גלובאלי)

ד. בהינתן שהנקודה המוקפת בעיגול משתתפת ב-K-means, ו $K=2$ לא תידרש יותר

מאיטרציה אחת של האלגוריתם להגיע לחלוקה אופטימלית (מינימום גלובאלי)

14. נתונים ערכי נקודות על ציר :

1	2	3.1	4	6
---	---	-----	---	---

הפעילו אשכול של הנקודות בשיטת Hierarchical Clustering (חישוב המרחק אוקלידי) בשיטות השונות של Linkage.

לפי אילו שיטות Linkage הנקודה שערכה הוא 6 תתחבר לשאר הנקודות אחרונה, לאחר שכל שאר הנקודות כבר חוברו לקבוצה אחת?

- א. בכל השיטות מלבד Single
- ב. בכל השיטות מלבד Centroid
- ג. בכל השיטות מלבד Average
- ד. בכל השיטות מלבד Complete
- ה. בכל השיטות

15. באיור (תרשים 13) מוצגות צורות המייצגות קלאסטרים במרחב דו-מימדי. שטח כל צורה מלא בדוגמאות מאותה קלאסטר בצפיפות גבוהה ואחידה. שני הצירים (x ו-y) בסקלה זהה.

מהו הקלאסטר האחרון שיחובר ב-Hierarchical Clustering (אחרי שהשתיים האחרות תחוברנה) לפי שיטות ה-Linkage השונות?

- א. בשיטת Single קלאסטר B ; בשיטת Complete קלאסטר C ; בשיטת Centroid קלאסטר A
- ב. בשיטת Single קלאסטר B ; בשיטת Complete קלאסטר A ; בשיטת Centroid קלאסטר C
- ג. בשיטת Single קלאסטר A ; בשיטת Complete קלאסטר C ; בשיטת Centroid קלאסטר B
- ד. בשיטות Single ו-Centroid קלאסטר B ; בשיטת Complete קלאסטר C
- ה. לא ניתן לדעת

16. איזה מבין הבאים נכון לגבי תיקון בונפרוני?

- א. מגדיל את ההסתברות לטעות מסוג 1
- ב. מקטין את ההסתברות לטעות מסוג 2
- ג. מגדיל את ההסתברות לטעות מסוג 1 ומקטין את ההסתברות לטעות מסוג 2
- ד. מגדיל את ההסתברות לטעות מסוג 2 ומקטין את ההסתברות לטעות מסוג 1
- ה. לא משפיע על ההסתברות לטעות מסוג 1 אבל מגדיל את ההסתברות לטעות מסוג 2

17. רמת ביטוי של 5,000 גנים נמדדה בדם של כ-40 נבדקים שונים. חצי מהנבדקים טופלו בתרופה וחצי לא. נרצה לדעת אילו גנים מושפעים מהטיפול. בגלל ריבוי ההשוואות ברצוננו לחשב את ה- false discovery rate (FDR) בעזרת פרמוטציות.

כיצד עלינו לעשות זאת?

- א. יש לבצע חלוקה אקראית של הנבדקים לשתי קבוצות, לבחון את ההבדל בין הקבוצות החדשות, ועבור אלפא נתון נספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות
- ב. יש לספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות לאחר תיקון בנפרוני, ערך אלפא הוא ה-FDR
- ג. יש לספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות, לבחון את ההבדל בין הקבוצות ולאחר מכן לבצע חלוקה של הנבדקים לשתי קבוצות אקראיות ועבור אלפא נתון לספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות. היחס בין שני אלו הוא ה-FDR
- ד. יש לספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות, לבחון את ההבדל בין הקבוצות ולאחר מכן לבצע ערבול של הגנים בכל נבדק ועבור אלפא נתון לספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות. היחס בין שני אלו הוא ה-FDR

18. כל משפטים נכונים המתייחסים לאלגוריתם kmeans פרט ל:

- א. האלגוריתם מתמודד היטב עם קבוצות "עגולות"
- ב. האלגוריתם מתמודד היטב עם קבוצות דומות בגודלן (מספר הדוגמאות בקבוצה)
- ג. האלגוריתם מתמודד היטב עם קבוצות דומות מאוד בצפיפותן
- ד. האלגוריתם מתמודד היטב עם קבוצות חופפות

19. מתי יש לבצע נרמול ממדים (z-score/scaling) לפני אנליזת PCA ?

- א. תמיד
- ב. אף פעם
- ג. כשהממדים נתונים ביחידות שונות ונרצה לנטרל את השפעת זו
- ד. כשלממדים שונות שונה ונרצה לנטרל השפעה זו

20. הבחירה בשיטת חישוב דמיון יכולה להיות בעלת השפעה מכרעת על התוצאות, כל המשפטים הבאים נכונים פרט ל:

- א. נשתמש במרחק אוקלידי כשגודל השינוי חשוב לנו יותר מכיוון ומגמת השינוי
- ב. נשתמש בקורלציית Pearson's כשהכיווניות חשובה לנו אך הגודל לא
- ג. נשתמש בקורלציית Spearman's במקום ב-Pearson's במצב בו המדדים המשווים נמדדו ביחידות שונות
- ד. נשתמש ב-Pearson כשנרצה להעריך את הקורלציה של משתנים הנמצאים ביחס לינארי

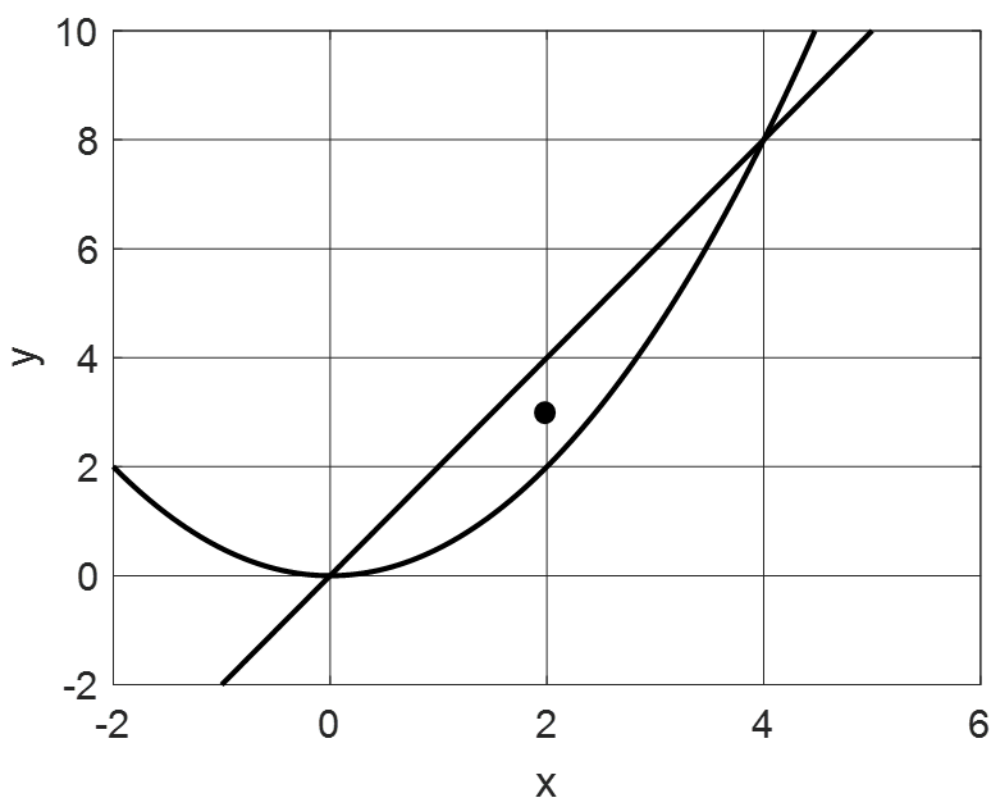
שאלות פתוחות דינמיות מועד א

שאלה 1

נתונה המערכת הדינמית הבאה :

$$\frac{dx}{dt} = y - 2x$$
$$\frac{dy}{dt} = y - \frac{x^2}{2}$$

- א. מיצאו את נקודות שיווי המשקל של המערכת
ב. סווגו את נקודות שיווי המשקל (צומת/אוכף/ספירלה...). נא להראות דרך חישוב.
ג. ציירו בקירוב את המסלול המתחיל בנקודה $x = 2, y = 3$

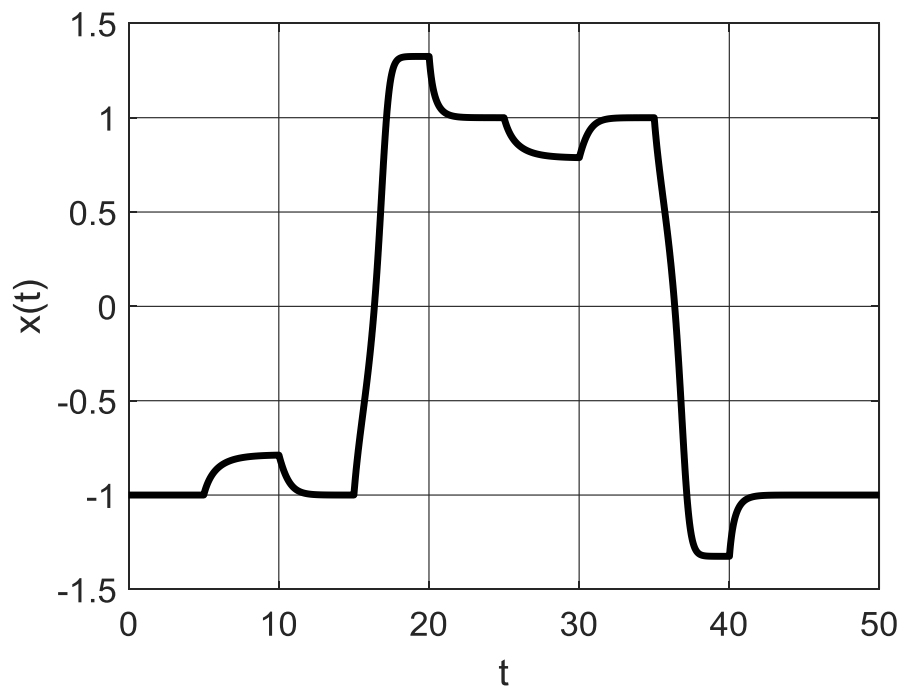
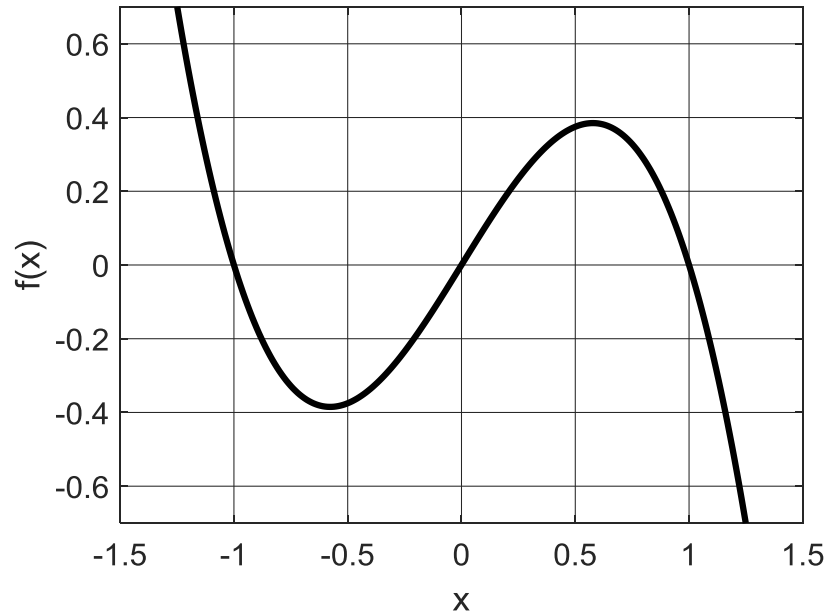


שאלה 2

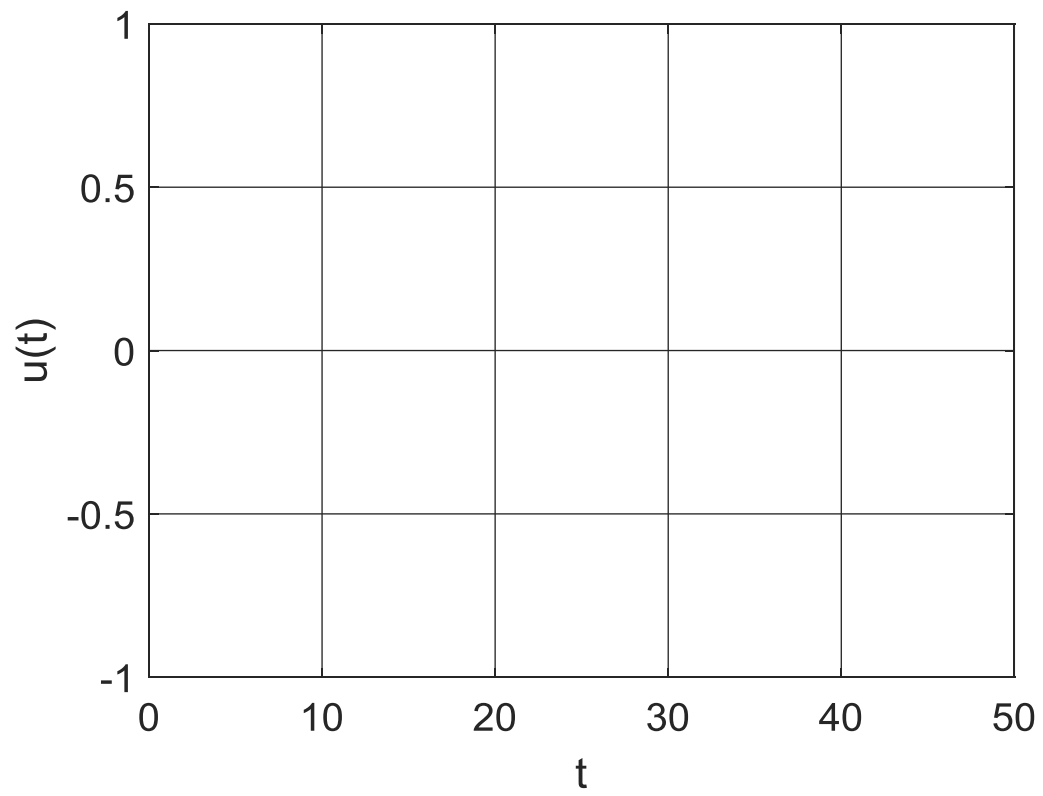
נתונה המערכת הדינמית:

$$\dot{x} = f(x) + u(t)$$

כאשר $f(x)$ ו $x(t)$ נתונים באיורים שלפניכם.

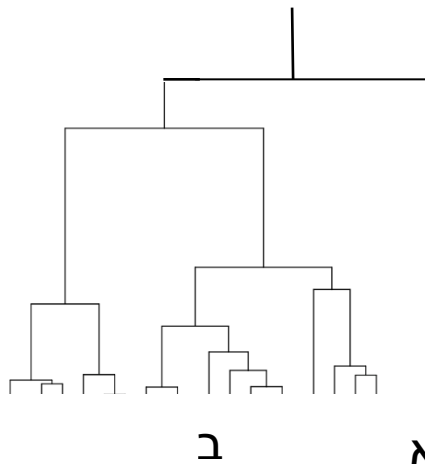


ציירו את $u(t)$



שאלה 3:

נתונה דנדרוגרמה של תוצאות הפעלת Hierarchical clustering על נתונים עם centroid linkage ממנה הוגדרו שלוש linkage ממונה הוגדרו שלוש



1. בהינתן שנשתמש במרחק אוקלידי ו-centroid linkage אם נזרוק את דוגמא א' מהנתונים, ונשמור על שלושה קלאסטרים: – כיצד זה ישפיע על מבנה הדנדרוגרמה? כיצד זה ישפיע על החברות בקלאסטרים?
2. בהינתן שנשתמש במרחק אוקלידי ו-centroid linkage אם נזרוק את דוגמא ב' מהנתונים, ונשמור על שלושה קלאסטרים: – כיצד זה ישפיע על מבנה הדנדרוגרמה? כיצד זה ישפיע על החברות בקלאסטרים?
3. בהינתן שנשתמש במרחק אוקלידי ו-centroid linkage אם נזרוק את דוגמא א' ואת ב' מהנתונים ונשמור על שלושה קלאסטרים: – כיצד זה ישפיע על מבנה הדנדרוגרמה? כיצד זה ישפיע על החברות בקלאסטרים?

```
function clust = kmeans(K,X);
% k-means spike sorting
% K: number of classes
% X: dataset matrix (num. of cases x dimensions)
% cluster = kmeans(K,X);

[n,d] = size(X);
clust = ones(n,1);
for t = 1:n;
    randomsample = randperm(K);
    clust(t) = randomsample(1);
end
clust2 = clust;
g = max(clust);
term = 1;

while term ~= 0;
    % Find centroids
    centroids = [];
    for c = 1:g;
        index = find(clust == c);
        if isempty(index) ~= 1;
            centroids = [centroids; mean(X(index,:))];
        end
    end
    end

    [g,dim] = size(centroids);
    dist = ones(n,1);
    for s = 1:n;
        x = X(s,:);
        x = ones(g,1)*x;
        d = (centroids - x).^2;
        d = sqrt(sum(d'));
        [m,index] = min(d);
        clust2(s) = index;
        dist(s) = m;
    end
    end

    term = sum(clust ~= clust2);
    clust = clust2;
end
```

1. אם נרצה לשנות את תנאי העצירה כך שנוגבל ל-10 איטרציות לפני עצירה, באילו שורות נבצע שינויים
2. מה יהיו ההשלכות אם בשורה 42, נרשום בטעות `clust=clust;`
3. נרצה להימנע מ-מינימום לוקאלי ולמצוא את הקלאסטרינג הטוב ביותר. איזה משתנה נצטרך להוסיף לקוד (כלומר איזה מידע צריך לשמור), ובאילו שורות תבצע שינויים על מנת לשמרו