



בחינת אותות ומערכות - מועד א תשע"ו 29.06.16

גרסה מספר: 122442785

שם הסטודנט _____

ת.ז. _____

סטודנט/ית יקר/ה,

המבחן כולל: 20 שאלות -16 סגורות, 4 פתוחות.

אנא קרא/י בתשומת לב את ההוראות:

- הדבק/י את מדבקת הברקוד במקום המיועד לכך. (במידה ואין בידך מדבקה
אנא רשום את מספר ת.ז. במקום המיועד)
- יש למלא את טופס התשובות בעט כדורי בלבד על ידי סימון ברור!
- יש לסמן תשובה אחת בלבד, סימון שתי תשובות כנכונות תחשב כשגיאה גם
אם אחת מהן נכונה.
- מצורף דף נוסחאות

משך הבחינה: שלוש שעות

ב ה צ ל ח ה !!!

אני (שם ומשפחה) _____ ת.ז. _____ נבחן/ת בבחינה זו, מצהיר/ה כי לא
אעתיק ולא אשתמש באמצעים המנוגדים לטוהר הבחינות בטכניון.

חתימה _____

29.6.16 אותות ומערכות מועד א

1. נתון כי הפונקציה $X(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}$ היא פתרון של מערכת עבודה מתקיים $\dot{X}(t) = AX(t)$ ו- $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$.

מצאו את מטריצת A ואת הווקטורים העצמיים המתאימים:

א. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ב. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ג. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ד. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ה. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

2. בחרו את התיאור של מערכת המשוואות הבאה:

$$\dot{x} = x(a - by)$$

$$\dot{y} = y(cx - d)$$

$$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$$

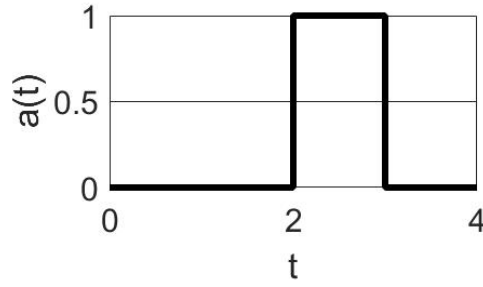
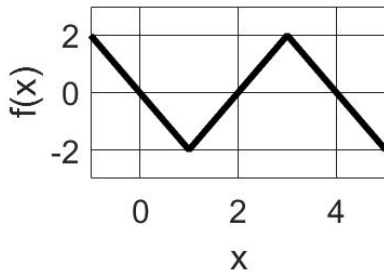
- א. x טורף את y . a זה קצב הגידול של x אם לא היו y בסביבה
ב. x טורף את y . b זה קצב הגידול של x אם לא היו y בסביבה
ג. y טורף את x . a זה קצב הגידול של x אם לא היו y בסביבה
ד. y טורף את x . b זה קצב הגידול של x אם לא היו y בסביבה

3. נתונה המערכת הבאה :

$$\dot{x} = f(x) + a(t)$$

$$x(0) = 0$$

כאשר הפונקציה $f(x)$, והקלט $a(t)$ מתוארים על ידי הגרפים הבאים :

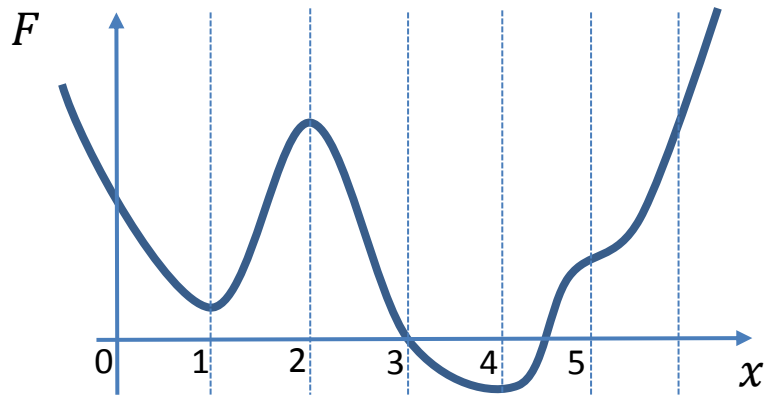


נתון כי $a(t) = 0$ עבור $t > 4$.

מה יהיה הערך של x בזמן $t = 100$?

- א. 0
- ב. 1
- ג. 2
- ד. 3
- ה. 4

4. נתונה משוואה דיפרנציאלית לא ליניארית מהצורה $\dot{x} = F(x)$.



כמו כן נתון תנאי התחלה: $x(0) = 0$.

כעבור הרבה זמן נקבל:

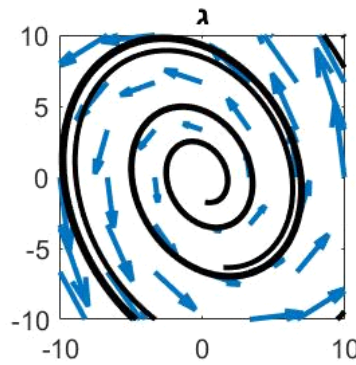
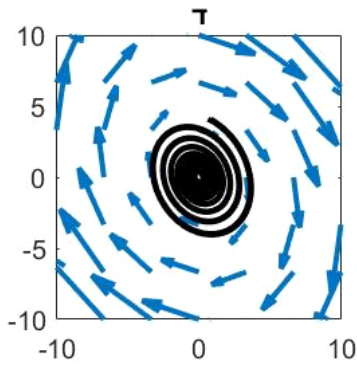
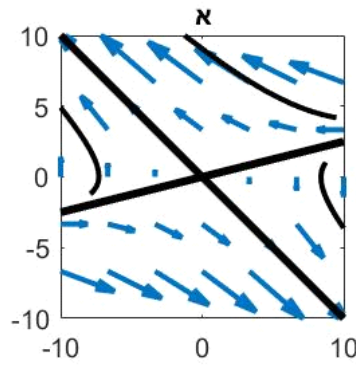
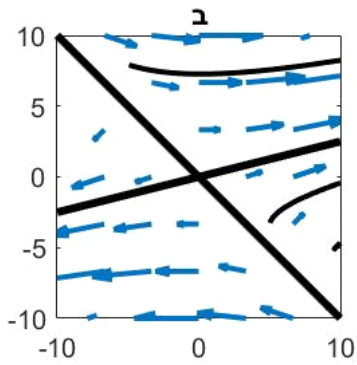
- א. $x \approx 1$
- ב. $x \approx 2$
- ג. $x \approx 3$
- ד. $x \approx 4$
- ה. $x \rightarrow \infty$

5. נתונה מערכת דינמית דו מימדית:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

כמו כן, ידוע כי $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה.

איזה מהאיורים הבאים של מסלולים במרחב הפאזה מתאר את המערכת?



6. מערכת דינאמית בדו-מימד מוגדרת ע"י משוואה דיפרנציאלית הבאה :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 8x_1x_2 - x_2 \\ -4x_2 + x_1^3 \end{pmatrix}$$

בדקו האם נקודה $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ היא נקודת שיווי משקל של המערכת. אם כן – סווגו אותה, אם לא – ציינו זאת :

- א. זאת לא נקודת שיווי משקל
- ב. צומת יציבה
- ג. צומת לא יציבה
- ד. ספירלה לא יציבה
- ה. אוקף

7. נתונה משוואה דיפרנציאלית ליניארית $\dot{x} = x$ עם תנאי התחלה: $x(0) = 1$.

נפתור פתרון נומרי עם $\Delta t = 1$.

למה שווה $x_{num}(2)$?

- א. 4
- ב. 7.4
- ג. e^1
- ד. e^2
- ה. e^{-2}

8. סטודנט לרפואה החליט להישאר ער וללמוד כל הלילה. לקראת השעה 12 הוא התחיל להרגיש עייף ונזכר שאחד המוליכים העצביים הקשור לקידום שינה הוא אדנוזין, וניתן לעכב אותו תחרותית באמצעות קפאין. הוא שתה כוס קפה אבל לאחר כשעה התחיל להרגיש עייפות שוב. הוא המשיך לשתות קפה והבחין בדינמיקה הבאה:

$$\frac{dC}{dt} = C$$

$$\frac{dA}{dt} = C - 2A$$

(A מתאר את רמת האדנוזין, ו-C את רמת הקפאין בדם)

מאיזה סוג נקודת שיווי המשקל של המערכת?

- א. אוכף
- ב. דעיכה לעבר נקודת שיווי המשקל
- ג. ספירלה מתבדרת
- ד. ספירלה דועכת
- ה. מעגלים

9. מבחן t הוא מבחן סטטיסטי המאפשר לבחון האם שתי קבוצות של מדידות שונות באופן משמעותי אחת מהשנייה.

אילו מההנחות הבאות איננה הנחה של מבחן t?

- א. הדגימות אינן תלויות אחת בשנייה
- ב. הנתונים מפולגים באופן נורמאלי
- ג. הממוצעים של שתי הקבוצות אינם רחוקים יותר מסטיית תקן אחת, אחד מהשני
- ד. הדגימות מייצגות את האוכלוסייה באופן לא-מוטה

10. בעת ביצוע מבחן t יחיד, הסיכון המקובל לטעות מסוג ראשון (false positive) הוא 0.05. קרי, ההסתברות שהתרחש מאורע קיצון שגרם לנו לחשוב שיש הבדל בין הקבוצות למרות שבמציאות אין. בעיית ריבוי הבדיקות טמונה בכך שריבוי ניסיונות (והשוואות של ניסיונות אלו) מעלה את ההסתברות להתרחשות מאורעות שאינם סבירים.

כך למשל, כאשר עושים 18 מבחני t ההסתברות להתרחשות של לפחות טעות אחת מסוג ראשון (עבור $\alpha=0.05$) היא:

- א. 0
- ב. 0.6
- ג. 0.9
- ד. 0.05

11. אחת השיטות להתגבר על בעיית ההשוואות המרובות היא חישוב של ה-FDR (false discovery rate), בהינתן מאגר מידע המכיל נתונים על ביטוי חלבונים אצל חולי סכרת וסטטוס המחלה (חולה/לא חולה) מה יהיה חישוב נכון של ה-FDR?

- א. הכפלת ה- α במספר מבחני ה-t שהתבצעו בהשוואת חולים ללא חולים
- ב. החלפת תיוגים אקראית של סטטוס מחלה וחישוב מספר ההשוואות שיצאו מובהקות יחסית לסך ההשוואות
- ג. החלפת תיוגים אקראית של ביטוי חלבונים וחישוב מספר ההשוואות שיצאו מובהקות יחסית לסך ההשוואות
- ד. הוצאה כל פעם של תת-קבוצה של אקראית של דוגמאות החוצה, וחישוב מספר ההשוואות שיצאו מובהקות יחסית לתוצאות כאשר כל הדוגמאות משתתפות בהשוואה

12. מהי המשמעות של הפרמטר λ (לאמבדה) ברגרסיית לאסו?

- א. לאמבדה הוא פרמטר "דיוק" ככל שהוא יגדל כך הדיוק של המודל יהיה גדול יותר
- ב. לאמבדה הוא פרמטר "מיון" הוא מאפשר לבחור פרמטרים ספציפיים שנקבעו מראש
- ג. לאמבדה הוא פרמטר "כוונון", ככל שהוא גדל כך המודל ישתמש בפחות פרמטרים
- ד. לאמבדה הוא פרמטר "ענישה" ככל שהלאמבדה גדול יותר, כך תקטן השגיאה הריבועית הממוצעת

13. נתונות שתי נקודות במרחב n ממדי אשר מרחקן האוקלידי ז' מזו נמדד ושווה ל-d. נשנה את הקואורדינטות של שתי הנקודות באחד מהאופנים המתוארים להלן.

איזה שינוי מבין השינויים הללו עשוי להוביל לשינוי המרחק האוקלידי בין הנקודות?

- א. היפוך סימן של כל קואורדינטה: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$
- ב. הוספה של מספר קבוע $a > 0$ לכל קואורדינטה
- ג. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a)$
- ד. החסרה של מספר קבוע $a > 0$ לכל קואורדינטה:
- ה. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 - a, x_2 - a, \dots, x_n - a)$
- ו. הכפלת כל קואורדינטה בקבוע $a > 0$: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 \cdot a, x_2 \cdot a, \dots, x_n \cdot a)$

14. סמן את המשפט הנכון ביחס לאנליזות מונחות (supervised) ולא מונחות (unsupervised):

- א. אנליזת לאסו היא שיטה מונחית אך hierarchical clustering, k-means clustering אינן מונחות
- ב. אנליזת לאסו ו-PCA הן שיטות מונחות אך hierarchical clustering ו-k-means clustering אינן מונחות
- ג. אנליזות hierarchical clustering ו-k-means clustering הן אנליזות מונחות אך PCA ולאסו אינן מונחות
- ד. אנליזת PCA היא שיטה מונחית אך hierarchical clustering, k-means clustering ולאסו אינן מונחות

15. נתונים שני clusters אשר כל אחד מהם מכיל מעל 2 נקודות. נניח כי לcluster אחד מהם משתייכת נקודה שערכיה שווים לצנטרואיד הcluster.

מה בהכרח יקרה לlinkage בין שני הclusters במידה ונוריד את נקודה זו?

- א. centroid linkagen בין שני הclusters יקטן
- ב. centroid linkagen בין שני הclusters לא ישתנה
- ג. average linkagen בין שני הclusters יגדל
- ד. average linkagen בין שני הclusters לא ישתנה

16. ביצעת clustering פעם עם complete linkage ופעם עם single linkage. בשלב מסוים בדנדרוגרמה שנבנתה בעזרת - single linkage הקלאסטר הכולל את דוגמאות {1,2,3} חובר לקלאסטר הכולל את דוגמאות {4,5}. באופן דומה, גם בדנדרוגרמה שנבנתה בעזרת - complete linkage אותם קלאסטרים חוברו בנקודה כלשהי.

- א. החבירות בין שני הקלאסטרים יתבצעו בשתי הדנדרוגרמות בגובה זהה
- ב. החבירות בין שני הקלאסטרים יתבצעו בגובה נמוך יותר בדנדרוגרמה של ה- complete linkage מאשר ב- single linkage
- ג. החבירות בין שני הקלאסטרים יתבצעו בגובה נמוך יותר בדנדרוגרמה של ה- single linkage מאשר ב- complete linkage
- ד. אין מספיק מידע בשביל לדעת על ההבדלים בחבירות בין שתי שיטות ה- linkage

פתוחה 1

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow y = -x$$

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$

$$\dot{y} \gg \dot{x}$$

$$\dot{y}|_{(0,0)} < 0$$

נתונה המערכת הבאה :

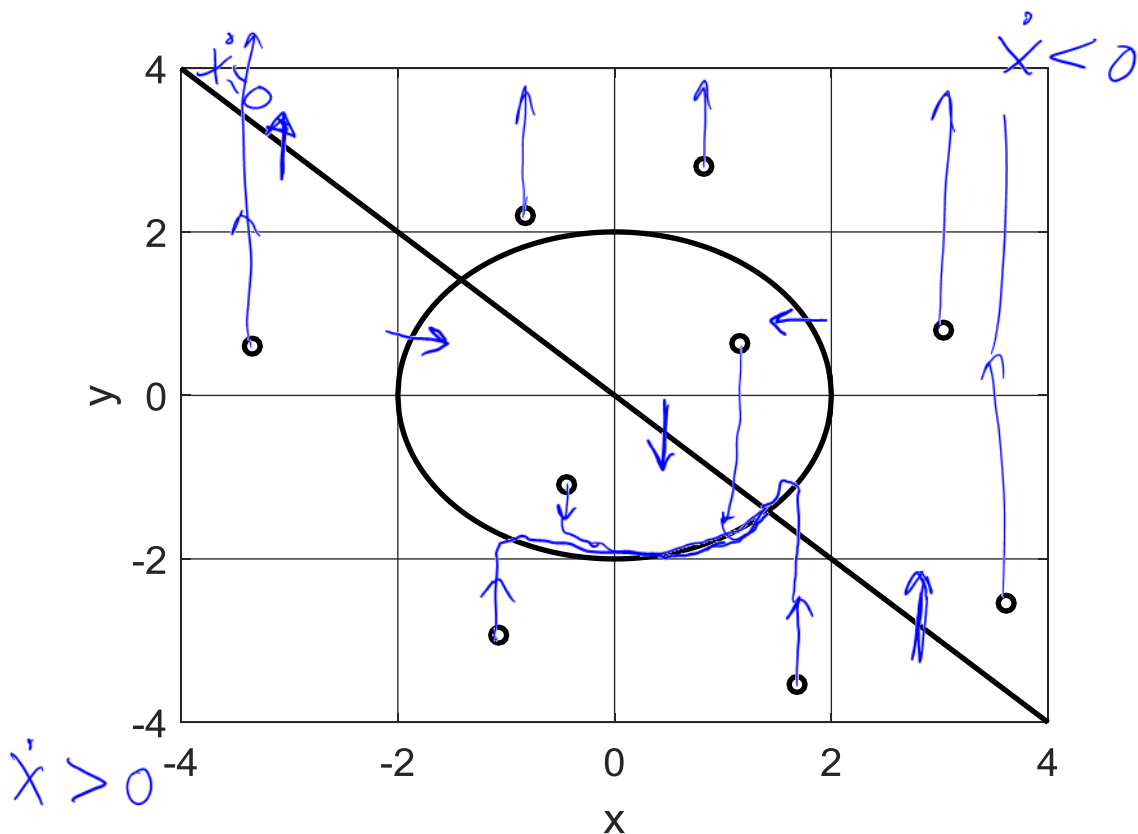
$$\dot{x} = 10^{-3}(-x - y)$$

$$\dot{y} = x^2 + y^2 - 4$$

ציירו באופן סכמטי את המסלולים שמתחילים בנקודות המסומנות באיור.

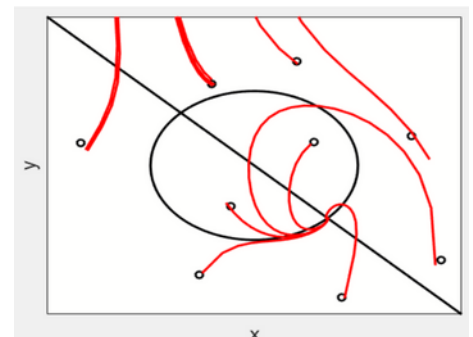
הקפידו על הפרטים הבאים :

1. לסמן חצים על המסלולים.
2. להמשיך עם המסלול עד שהוא יוצא משטח האיור, או עד שהוא נתקע בנקודת שבת.
3. אין צורך לחשב או לצייר וקטורים עצמיים.



- 5 מקודות לפי:
- 1 - יש נש"מ יציבה אחת במקום הנכון
 - 1 - חציית עקומי אפס נכונה
 - 1 - תנועה ב"אלכסון" הנכון הרחק מעקומי אפס (אם אנכי לגמרי, להתעלם מרכיב אופקי)
 - 1 - המסלולים נצמדים למעגל, ולא לעקום אפס השני
 - 1 - המסלולים אנכיים הרחק מהמעגל (בערך עד כדי 30 מעלות מתקבל)

11
אם יש מספר סעיפים שכמעט מושלמים, לא להוריד יותר מנקודה עליהם בסך הכל. הדוגמא שמימין מקבלת 5/4, מכיוון שהמסלולים רחוקים מלהיות אנכיים.



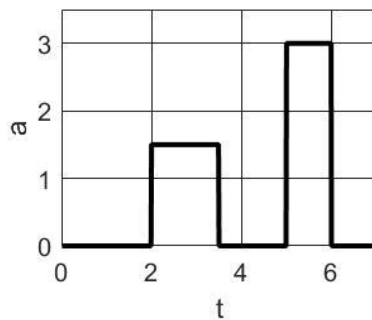
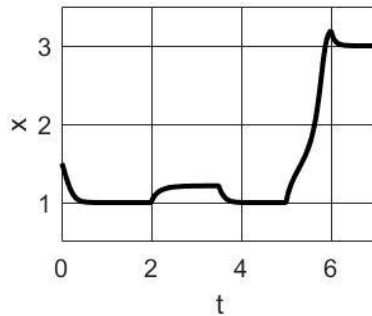
פתוחה 2

נתונה מערכת דינמית:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + a(t)$$

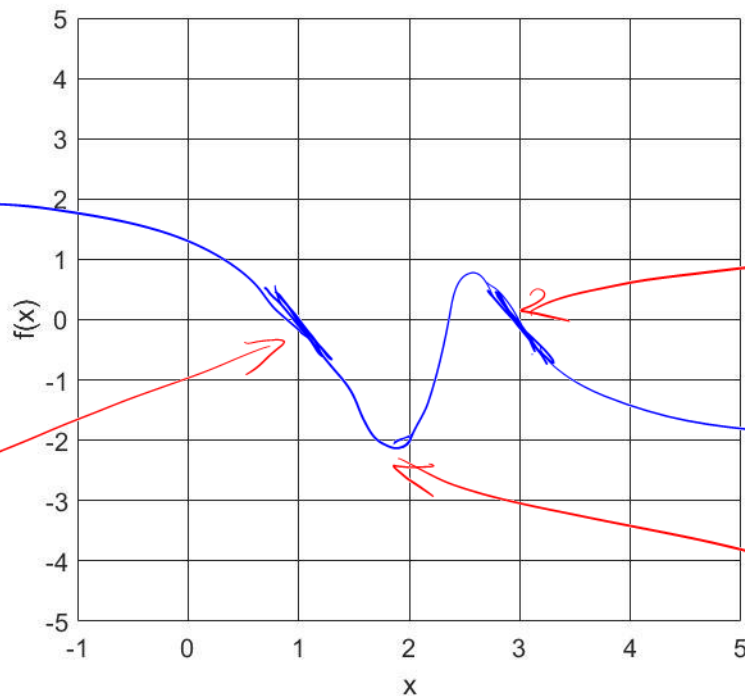
$$x(0) = 1.5$$

כמו כן נתונים: $x(t), a(t)$



ציירו את $f(x)$ באופן סכמטי.

אין צורך לרדת לפרטי פרטים, אך הפונקציה צריכה להסביר את התופעות העיקריות בגרפים.



רמץ יציבה ג-1

רמץ יציבה ג-3

מינימום
מיון $(1\frac{1}{2}, 3)$

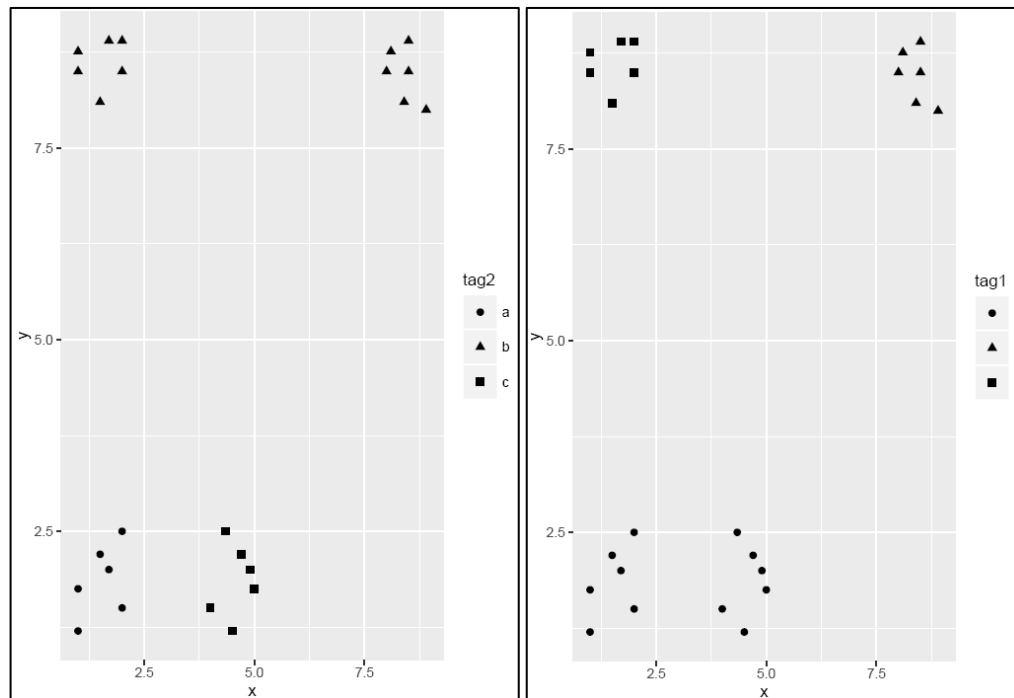
- 4 מקודות לפי:
- 1 - יש לפחות שתי מקודות יציבות
- 1 - מקודה יציבה ב-1
- 1 - מקודה יציבה ב-3
- 1 - הערך של $F(x)$ במינימום בין המקודות היציבות הוא בין -1.5 ל-3

מוכנה
ג-1.25

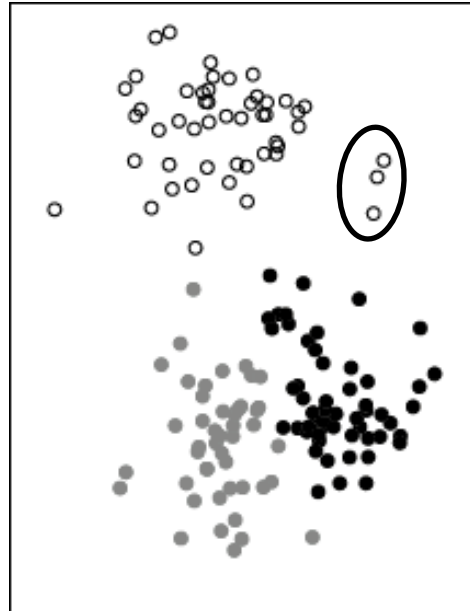
כדי להגיע ל-5 נקודות

פתוחה 3

נתונות 24 נקודות במרחב דו-מימדי. הדוגמאות עברו clustering פעמיים באמצעות שיטת k means עם $k=3$, תחת תנאים זהים. נתונים להלן **תנאי ההתחלה** של האלגוריתם בשני המקרים (צורה שונה מסמלת תיגוג התחלתי שונה).



1. סמנו על כל שרטוט את גבולות ה-clusters הצפויים להתקבל לאחר התכנסות האלגוריתם.
2. האם יתכן שהאלגוריתם יתכנס לשני מצבים שונים? מדוע?
3. עבור אילו ערכים של k **לא יתכן** כי האלגוריתם יתכנס לשני מצבים שונים?



נתון גרף בדו-מימד של דוגמאות.

- א. באם נבצע PCA על דוגמאות בגרף זה – לאיזה משני הממדים יהיה משקל (loading) גדול יותר ב Principle component הראשון?
- ב. כיצד ישתנה ה-loading זה באם לא נתחשב בשלוש הנקודות הקופות בעיגול ?
- ג. דמיין שלכל דוגמא נוסף עכשיו מימד שלישי שערכו מוגרל מהתפלגות נורמלית עם ממוצע 0 וסטטיית תקן 1 לדוגמאות האפורות והלבנות ו ממוצע 2 וסטטיית תקן 1 לנקודות השחורות. באיזה אופן ביצוע PCA חדש על הנתונים צפוי להראות אחרת מזה שבוצע ב-א' ?

ערכים עצמיים במטריצה הם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right]$$

כאשר

$$\Delta = ad - bc$$

$$\tau = a + d$$

כמו כן מתקיים:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \tau$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \Delta$$

הקשר בין ערך עצמי מרוכב לתדר וזמן מחזור:

$$\lambda = \alpha \pm i\omega$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

היעקוביאן של המערכת הוא $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$