



שיעור חזרה למבחן

מערכות דינמיות ורב-מימד

<https://forms.gle/aWqFMaVHmxXFzoRU6>

מעין ברילר – mayanbriller@campus.technion.ac.il

מבנה המבחן

- אורך המבחן: 3 שעות
- חומר עזר: מחשבון
- כ-9 שאלות סגורות, 2 שאלות פתוחות
- דינמיות: 3 שאלות סגורות + שאלה אחת פתוחה
- רב-מימד חומר "ישן": 4 שאלות סגורות
- רב-מימד חומר "חדש": 2 שאלות סגורות + אחת פתוחה



חומר המבחן

מערכות דינמיות

1. כללי

1. מעבר משאלה מילולית למשוואה דיפרנציאלית
 2. מעבר ממשוואה למלים
2. מערכות עם מימד אחד
1. פתרון גרפי
 2. פתרון אנליטי של מערכת לינארית
 3. בדיקה שפונקציה כלשהי היא פתרון של מערכת
 4. פתרון נומרי
 5. לינאריזציה, יציבות
 6. קונבולוציה
3. מערכות עם שני מימדים
1. מרחב הפאזה
 2. **עקומי אפס**
 3. **לינאריזציה, יציבות – סוגים של נקודות שבת**
 4. **ערכים עצמיים**
 5. מעבר מסדר שני לסדר ראשון
 6. הפרדת קבועי זמן

רב ממדיות

1. כללי

1. יתרונות ובעיות באנליזה רב ממדית
 2. אנליזות מונחות כנגד לא מונחות – צורך, שימושים, יתרונות וחסרונות
2. מרחקים וחיפוש תבניות לא-מונחה
1. דמיון רב ממדי (חיפוש דמיון בין דוגמאות או בין מדידות)
 2. מרחקים/דמיון - אוקלידי, פירסון, ספירמן ועוד כאלה
- שמעוררים מחשבה
3. רשתות – סוגים, יצירה בעזרת מרחקים, תכונות
-
4. Linkage – שימוש והשלכות הבדלים בין שיטות
 5. K-means – עקרונות עבודה, שימוש, יתרונות וחסרונות
 6. Hierarchical clustering - עקרונות עבודה, שימוש, יתרונות וחסרונות
 7. קביעת גודל קלאסטרים
3. זיהוי הבדלים ברב ממד וחקר שונות
1. שימוש ברנדומזציה ל-pval ול-FDR
 2. הורדת מימידים ו-PCA loadings, biplot, scree

שיעור חזרה היום

במתכונת – מה שנספיק, נספיק

שעה ראשונה: מערכות דינמיות

שעה שנייה: רב-מימד

חלק גדול מהשאלות שנשאלתם
במהלך הסמסטר (בתרגולים ובמודל)
הן שאלות ממבחנים



מערכות דינמיות



מועד ב' 2019 – שאלה 1

נושא:
ממשוואה
למילים

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\frac{dA}{dt} = \alpha A - bB + c$$

$$\frac{dB}{dt} = dA - fB + g$$

$$a, b, c, d, f, g > 0$$

ידוע כי A ו-B מתארים את רמת הפעילות של שתי אוכלוסיות נזירונים. אחת נזירונים מעוררים – הם מעלים את הפעילות של הנזירונים אליהם הם מחוברים. השנייה נזירונים מעכבים – הם מורידים את הפעילות של הנזירונים אליהם הם מחוברים. ביחרו את הפרשנות הסבירה ביותר למשתנים והפרמטרים:

א. A הם המעוררים, B הם המעכבים, f זה חוזק החיבור מקבוצה A לקבוצה B

ב. A הם המעוררים, B הם המעכבים, c זה קלט חיצוני לקבוצה B

ג. A הם המעוררים, B הם המעכבים, d זה חוזק החיבור מקבוצה A לקבוצה B

ד. A הם המעכבים, B הם המעוררים, b זה חוזק החיבור מקבוצה B לקבוצה A

ה. A הם המעכבים, B הם המעוררים, g זה קלט חיצוני לקבוצה B

איך פותרים משוואות דינמיות פשוטות?

גרפית | נומרית | אנליטית

מתארת את התנהגות המערכת באופן המדוייק ביותר. המערכת מתכנסת לנקודת השבת.

$$X_{ss} = \frac{u}{q}$$

אם נקודת השבת היא

אזי הפתרון של משוואת הקצב הוא:

$$x(t) = \underbrace{x(0) \cdot e^{-qt}}_{\text{מתחיל ב-} x(0) \text{ ודועך אקספוננציאלית עם } t} + \frac{u}{q} \underbrace{(1 - e^{-qt})}_{\text{גדל אקספוננציאלית עם } t \text{ עד לערך של } 1}$$

מתחיל ב- $x(0)$
ודועך
אקספוננציאלית
עם t

גדל
אקספוננציאלית
עם t עד לערך
של 1

בניית טבלה המכילה את מצב המערכת בכל זמן נתון בהסתמך על מצב המערכת בנק' הזמן לפניה.

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t \cdot \frac{dx}{dt}$$

מצב המערכת בזמן $t + \Delta t$

מצב המערכת בזמן t

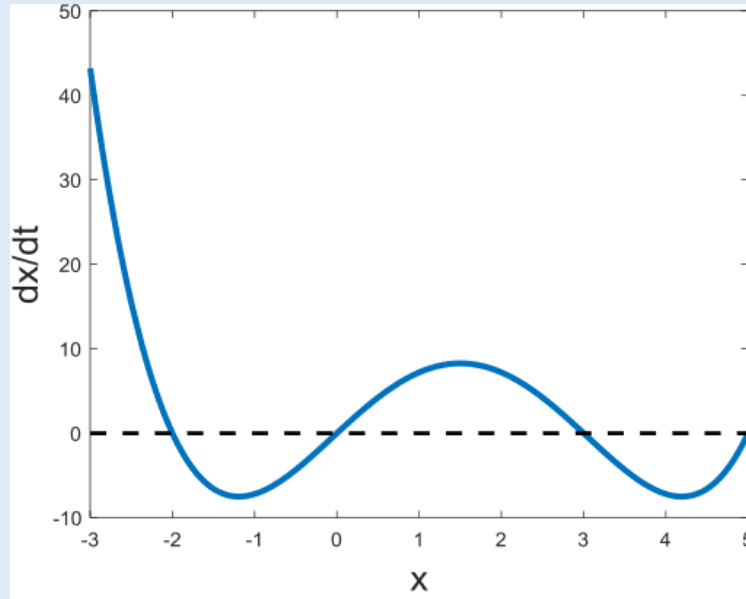
קצב השינוי ב- x כפול הפרש הזמנים מהמדידה הקודמת

רמת הדיוק בפתרון הנומרי תלוייה באופן ישיר ב- Δt .
ככל שהוא קטן יותר כך הפתרון מדוייק יותר

- מציאת נקודת השבת
- מציאת תנאי ההתחלה
- נשים לב לצירים

מועד א' 2017 – שאלה 2

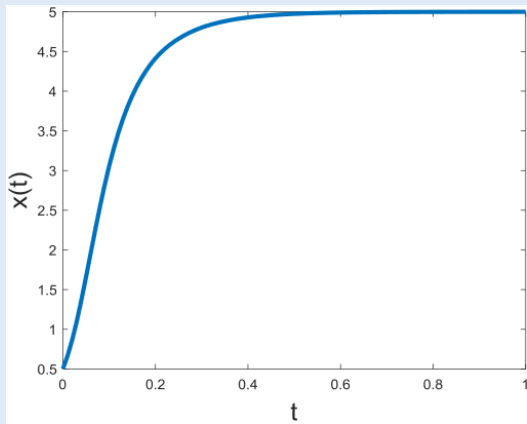
נושא:
פתרון גרפי



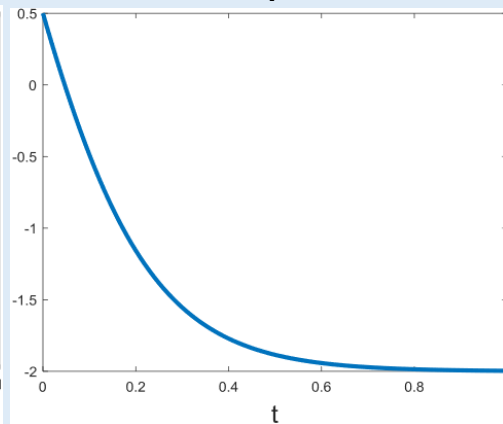
נתונה המערכת הדינמית הבאה:

בהנתן תנאי ההתחלה $x(0) = 0.5$, איך יראה הפתרון $x(t)$?

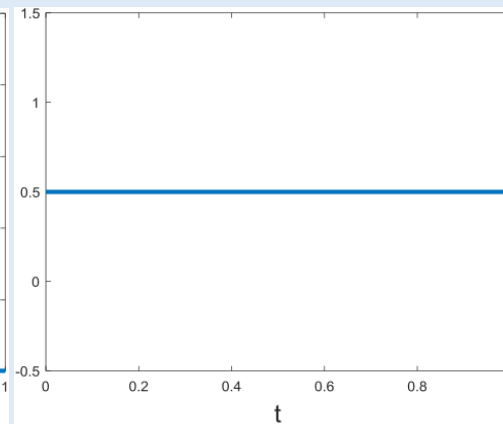
5



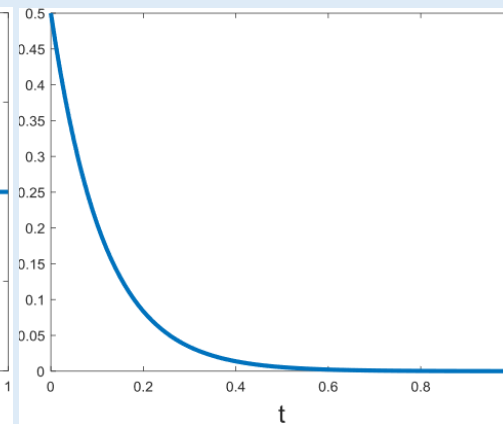
4



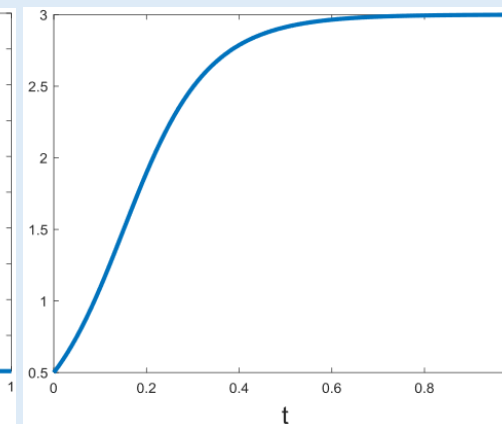
3



2



1



מועד ב' 2018 – שאלה 2

נתונה המערכת הדינמית הבאה:

$$\dot{x} = x^3 - 4x - 1$$
$$x(0) = 0$$

חשבו את $x(3)$ באמצעות פתרון נומרי, עם $\Delta t = 1$

תזכורת: עבור $f(x) = \dot{x}$, חישוב נומרי מתבצע באמצעות $x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot f(x(t))$

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t \cdot \frac{dx}{dt}$$

t	$x(t + \Delta t)$	$\frac{dx}{dt}$	$\Delta t \cdot \frac{dx}{dt}$

1. -3

2. -1

3. 17

4. 47

5. אף תשובה איננה נכונה

נושא:
פתרון
נומרי

מועד ב' 2018 – שאלה 9

נושא:
פתרון
אנליטי

$$\dot{x} = 4x - 8$$
$$x(0) = -2$$

נתון:

מה הפתרון האנליטי?

$$x(t) = -2e^{4t} \quad .1$$

$$x(t) = -2 + 4e^{-8t} \quad .2$$

$$x(t) = 2 + 4e^{4t} \quad .3$$

$$x(t) = -2e^{-8t} \quad .4$$

$$x(t) = 2 - 4e^{4t} \quad .5$$

$$x(t) = x(0) \cdot e^{-qt} + \frac{u}{q} (1 - e^{-qt})$$

מועד א' 2018 – שאלה 5

נושא:
לינאריזציה

$$\dot{x} = x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

נתונה המשוואה

$$x(0) = 6 \text{ כִּי נתון}$$

בצעו קירוב לינארי לנקודת השבת הקרובה, ומצאו את הערך המקורב של $x(1)$ לפי קירוב זה:

א. $4 + 5e^{11}$

ב. $6 + e^{11}$

ג. $4 + 2e^7$

ד. $2e^7$

ה. $5e^{11}$

סדר פעולות בפתרון שכולל לינאריזציה

נשתמש בלינאריזציה כדי למצוא פתרון כמותי מקורב ($x(t)$) של המערכת. הקירוב הוא לינארי בסביבת נקודת השבת.

כדי לפשט נקרא ל- \dot{x} כ- $f(x)$. על מנת למצוא פתרון מקורב בנקודה קרובה לנקודת השבת:

יצירת עקום משיק בנקודת השבת \leftarrow מציאת שיפוע העקום \leftarrow נמצא את הפתרון של $x(t)$ בעזרת העקום

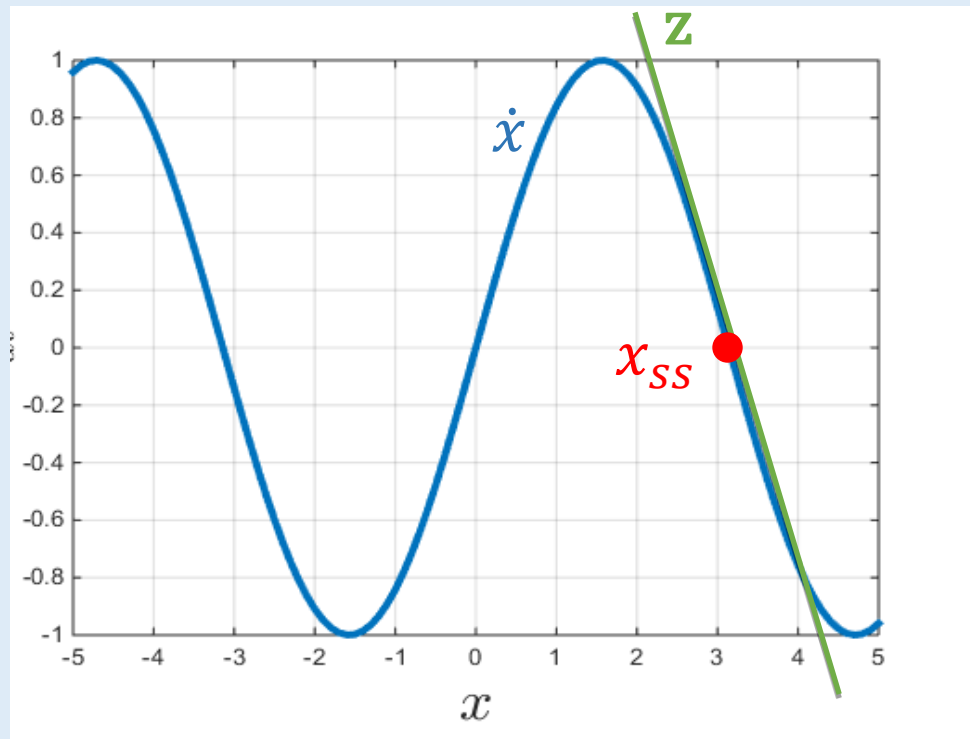
1. נסמן עקום z שמשיק ל- \dot{x} בנקודת השבת: $z = a(x - x_{SS})$ (משוואה 1)

2. אם נגזור את z נקבל ביטוי מהצורה $\dot{z} = a \cdot z$ כאשר a הוא שיפוע נגזרת הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_{SS} . זהו פיתוח של טור טיילור שאתם לא צריכים לדעת איך לעשות.

3. כדי למצוא את השיפוע a נגזור את הפונקציה הנתונה לנו $f(x)$ לפי x בנקודה x_{SS} - כלומר $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_{SS}}$

4. קיבלנו משוואה מהצורה $\dot{z} = -az$ ופתרונה הוא כמו שלמדנו: $z(t) = z(0) \cdot e^{-at}$ (משוואה 2).

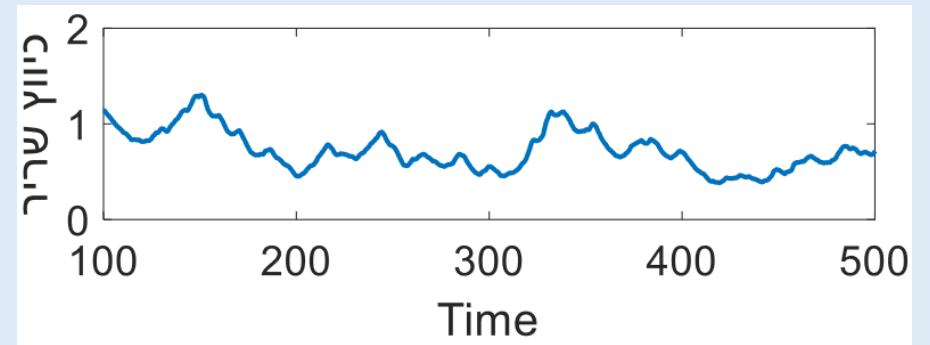
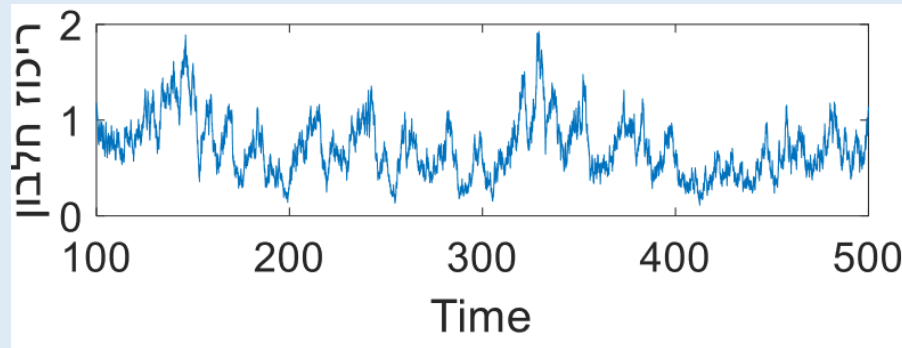
5. נשתמש במשוואות 1 ו-2 (שתיהן $z(t)$) ובתנאי ההתחלה על מנת למצוא את מה שאנחנו צריכים.



מועד ב' 2018 – שאלה 7

נושא:
קונבולוציה

חוקר מבצע ניסוי במעבדה שבו הוא מודד ריכוז חלבון מסוים בתאי שריר, ואת כיווץ השריר לאורך זמן ומקבל את התוצאה הבאה:



ידוע כי השריר מתכווץ כתוצאה מנוכחות החלבון לפי המשוואה הבאה: $\tau \frac{dx}{dt} = -x + u(t)$ כאשר x מייצג את כיווץ השריר ו- $u(t)$ מייצג את ריכוז החלבון.

מהו הערך של τ ?

א. $\tau = 1$

ב. $\tau = 10$

ג. $\tau = 100$

ד. $\tau = 1000$

ה. $\tau = 10000$

מועד א' 2018 – שאלה 7

נושא:
מרחב
הפאזה

נתונה המערכת הדו-מימדית הבאה:

$$\dot{x} = Ax$$

ידוע שכל תנאי ההתחלה המובילים להתכנסות המערכת לנקודת השבת ממוקמים לאורך קו ישר במרחב הפאזה. איזו מטריצה A יכולה להתאים למצב הזה?

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.}$$

ה. המצב הזה בלתי אפשרי

מועד ב' 2019 – שאלה 3

נושא:
מעבר
מסדר שני
לסדר
ראשון

נתונה המערכת הדינמית הבאה:

$$\ddot{x} = 6\dot{x} - 5x$$
$$x(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0$$

בחרו את המשפט הנכון ביותר:

- א. זו מערכת במימד אחד, ולכן לא ייתכנו בה תנודות.
- ב. המערכת תציג תנודות בזמן מחזור $2\pi/5$
- ג. המערכת תציג תנודות בזמן מחזור 2π
- ד. המערכת תדעך לאפס ללא תנודות
- ה. המערכת תתבדר לאינסוף ללא תנודות

מועד ב' 2019 – שאלה 3

נושא:
דו-מימד

נתונה המערכת הדינמית הבאה:

$$\frac{dx}{dt} = y^2 - x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y - 2x + 3$$

- א. רשמו את המשוואות של עקומי האפס, וציירו אותם על גבי הגרף. חשוב שיהיה ברור איזה עקום שייך לאיזה משתנה.
- ב. מצאו את כל נקודות השבת של המערכת.
- ג. עבור כל נקודת שבת, בצעו לינאריזציה. רישמו את המטריצה המתקבלת, וסווגו את נקודת שיווי המשקל.
- ד. ציירו מסלול המתחיל בנקודה $x = 4, y = 0$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

מועד ב' 2019 – שאלה פתוחה 2

נתונה המערכת הדינמית הבאה:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 2x^3 - y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= \epsilon(2x - 2x^3 - y) \quad ; \quad \epsilon = 1 \end{aligned}$$

נושא:
דו-מימד +
הפרדת
זמנים

באיור בעמוד הבא מופיעים 3 עקומים. אלו הם עקומי האפס של המערכת (שניים שייכים לאותו משתנה). כמו כן מופיעים שני מסלולים (מקווקווים עם חצים).

2.1. באיור מופיעים 3 עקומים. שייכו כל אחד מהם לאחד משני עקומי האפס.

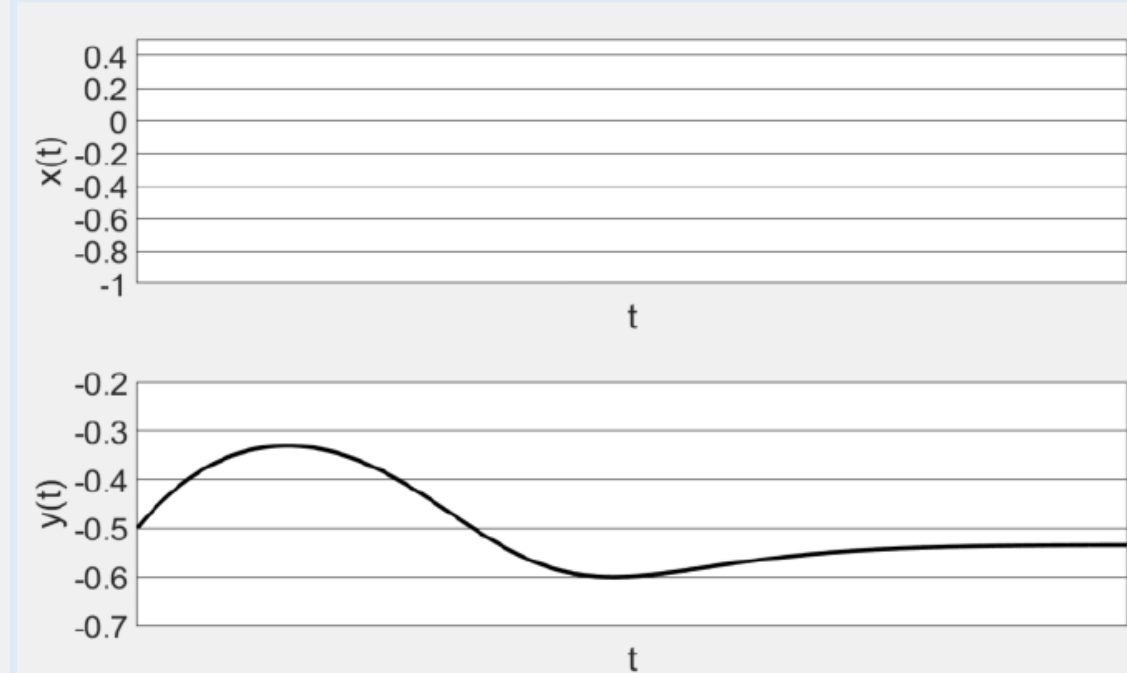
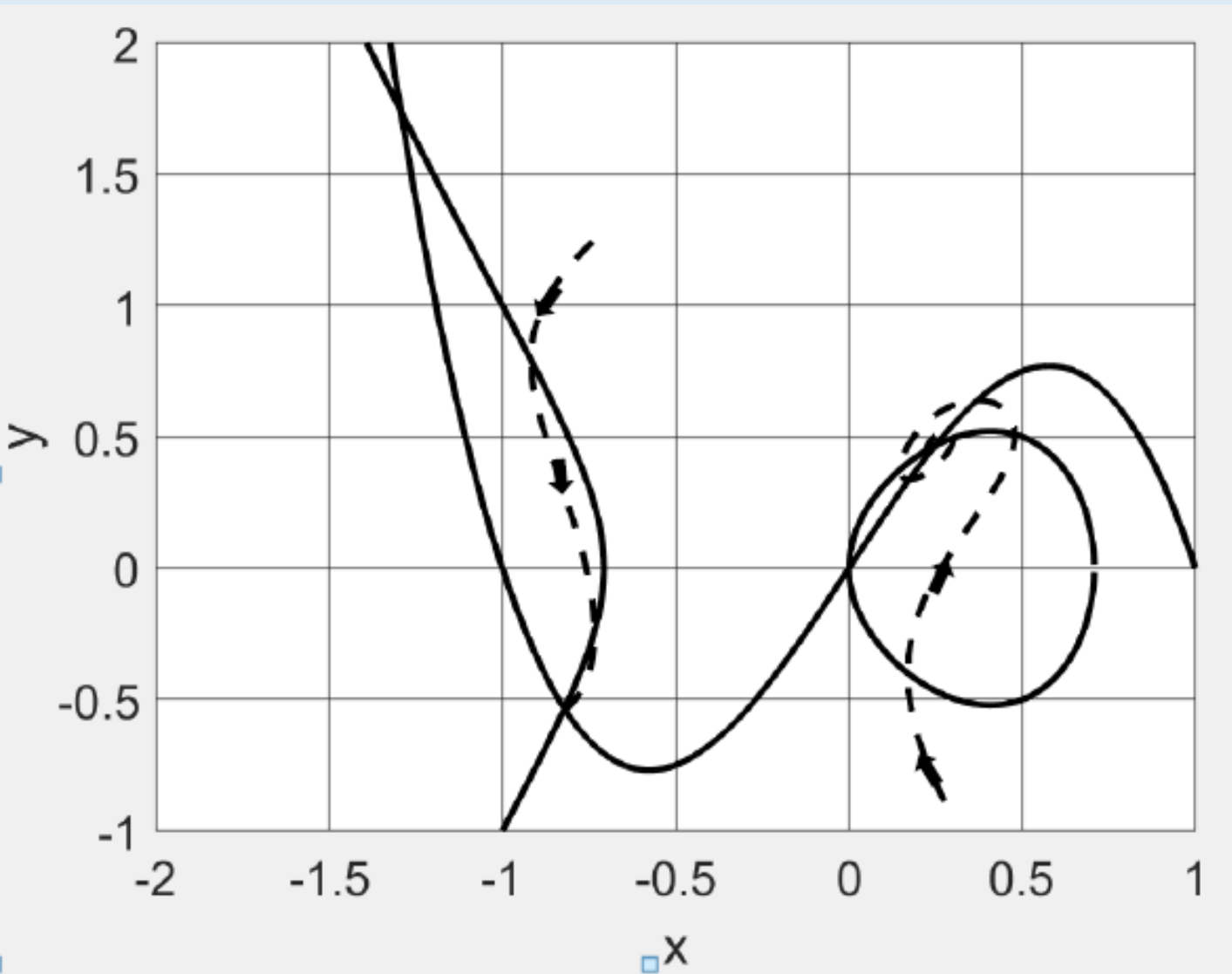
2.2. בצעו לינאריזציה לנקודת השבת שנמצאת ב $(0,0)$. מצאו את הערכים העצמיים וסווגו את נקודת השבת.

2.3. נתון כי מסלול התחיל בנקודה $(0,-0.5)$. לרשותכם $y(t)$ של אותו מסלול. ציירו את $x(t)$, וציירו את המסלול במרחב הפאזה.

2.4. כעת נתון כי $\epsilon=0.001$. ציירו את המסלולים המתחילים בנקודות $(1,0.25)$, $(0,1.9)$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

מועד ב' 2019 – שאלה פתוחה 2





רב מימד

מועד א' 2019 – שאלה 6

לפניכם טבלה עם ציונים של 5 סטודנטים, ב- 4 קורסים. מצאו את הסטודנט/ית הרחוק/ה ביותר מהסטודנט חיים, כשדמיון מוגדר לפי קורלציית ספירמן.

פיזיולוגיה של התא	פיזיולוגיה מערכתית	אלגברה ליניארית	אותות א	
87	95	76	88	חיים
90	68	88	89	אופירה
76	87	88	95	אחמד
85	72	87	80	חן
61	80	56	62	יעקב

א. אופירה

ב. אחמד

ג. חן

ד. יעקב

ה. אי אפשר לדעת

נושא:
דמיון
ומרחק

מועד ב' 2018 – שאלה 11

נושא:
דמיון
ומרחק

ערכנו השוואה בביטוי של שלושה גנים A, B, C ב-100 אנשים שונים:

קורילצית פירסון בערך מוחלט בין A ל-B היא 1, קורילצית פירסון בין A ל-C היא 0.8.
איזה מהמשפטים הבאים נכון?

א. קורילצית פירסון בין B ל-C שווה ל-0.8.

ב. קורילצית ספירמן בין A ל-B שווה או יותר גדולה מקורילצית ספירמן בין A ל-C

ג. המרחק האוקלידי בין A ל-B יותר קטן מהמרחק האוקלידי בין A ל-C

ד. קורילצית פירסון בערך מוחלט בין B ל-C קטנה מ-0.9

מועד ב' 2018 – שאלה 14

נושא:
פרמוטציות

לאחר הבחינה בקורס אותות ב', המרצה האחראי הבחין בהבדל מובהק בהישגי הסטודנטים בין השאלות בבחינה העוסקות במערכות דינמיות (שאלות 1-10) ובין השאלות העוסקות בניתוח רב-מימדי (שאלות 11-20). המרצה האחראי היה על סף הסקת מסקנות אישיות, אלא שאז עלה על דעתו שייתכן שמדובר בטעות מסוג ראשון (false positive) או במובהקות בהבדל בציונים, שאיננה קשורה ליכולתו כמורה. כיצד יוכל בעזרת שחלופים (פרמוטציות) אקראיים לקבל הערכה למצב זה?

1. מספרי הזהות של הסטודנטים

2. סדר השאלות

3. מספרי המסיחים בכל שאלה

4. גם את מספרי הזהות של הסטודנטים וגם את סדר השאלות

5. אף שחלוף מהנ"ל לא יכול לשמש כדי להעריך את הסיכוי לטעות מסוג ראשון.

מועד א' 2017 – שאלה 17

נושא:
FDR
ופרמוטציות

רמת ביטוי של 5,000 גנים נמדדה בדם של כ-40 נבדקים שונים. חצי מהנבדקים טופלו בתרופה וחצי לא. נרצה לדעת אילו גנים מושפעים מהטיפול. בגלל ריבוי ההשוואות ברצוננו לחשב את ה- $\text{false discovery rate (FDR)}$ בעזרת פרמוטציות. כיצד עלינו לעשות זאת?

א. יש לבצע חלוקה אקראית של הנבדקים לשתי קבוצות, לבחון את ההבדל בין הקבוצות החדשות, ועבור אלפא נתון נספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות

ב. יש לספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות לאחר תיקון בנפורוני, ערך אלפא הוא ה- FDR

ג. יש לספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות, לבחון את ההבדל בין הקבוצות ולאחר מכן לבצע חלוקה של הנבדקים לשתי קבוצות אקראיות ועבור אלפא נתון לספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות. היחס בין שני אלו הוא ה- FDR .

ד. יש לספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות, לבחון את ההבדל בין הקבוצות ולאחר מכן לבצע ערבול של הגנים בכל נבדק ועבור אלפא נתון לספור את מספר הגנים שעברו את סף המובהקות. היחס בין שני אלו הוא ה- FDR

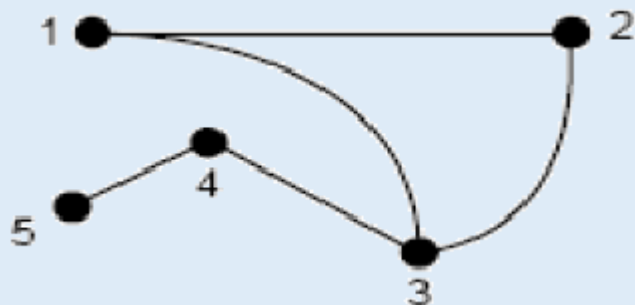
מועד ב' 2018 – שאלה 15

נושא:
רשתות

איזה מהמטריצות קורלציה יכולות לתאר את הגרף הבא בהנתן ערך סף של 0.7?

ב.

0	0.222	0.654	0.333	0.231
0.222	0	0.321	0.567	0.423
0.654	0.321	0	0.876	0.427
0.444	0.567	0.876	0	0.899
0.231	0.423	0.427	0.899	0



א.

0	0.786	0.924	0.444	0.231
0.786	0	0.744	0.567	0.423
0.924	0.744	0	0.876	0.427
0.444	0.567	0.876	0	0.899
0.231	0.423	0.427	0.899	0

ד.

0	0.786	0.924	0.748	0.978
0.786	0	0.744	0.567	0.423
0.924	0.744	0	0.876	0.427
0.748	0.567	0.876	0	0.899
0.978	0.423	0.427	0.876	0

ג.

0	0.786	0.924	0.682	0.245
0.786	0	0.744	0.567	0.423
0.924	0.744	0	0.876	0.745
0.682	0.567	0.876	0	0.899
0.245	0.423	0.745	0.876	0

מועד ב' 2016 – שאלה 15

נושא:
linkage

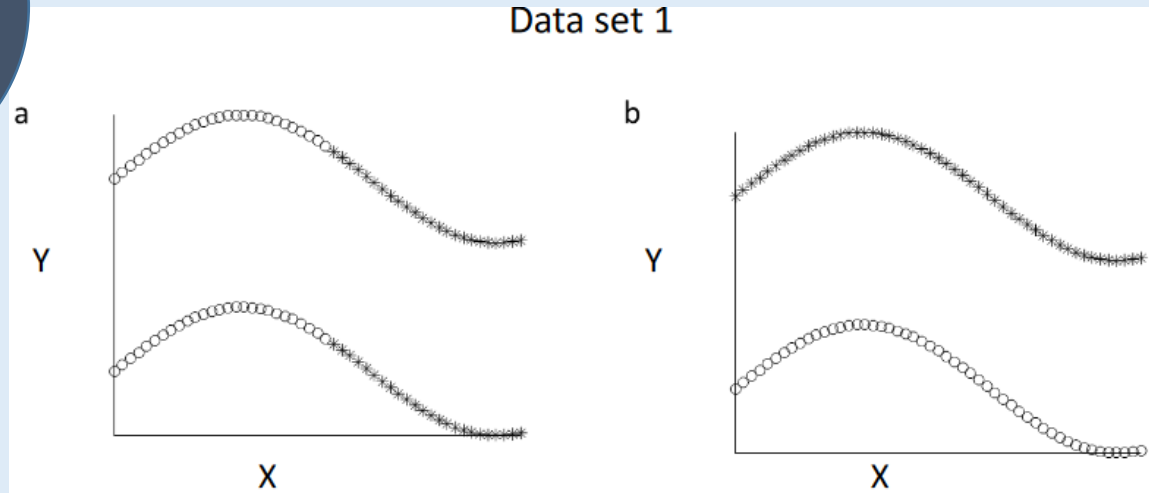
נתונים שני סטים של נתונים (Dataset 1, Dataset 2) בהן כל דוגמא נמדדה בשני ממדים (X ו-Y). כל סט נתונים

נותח פעמיים, בכל פעם ע"י אנליזת אשכול כל שהיא

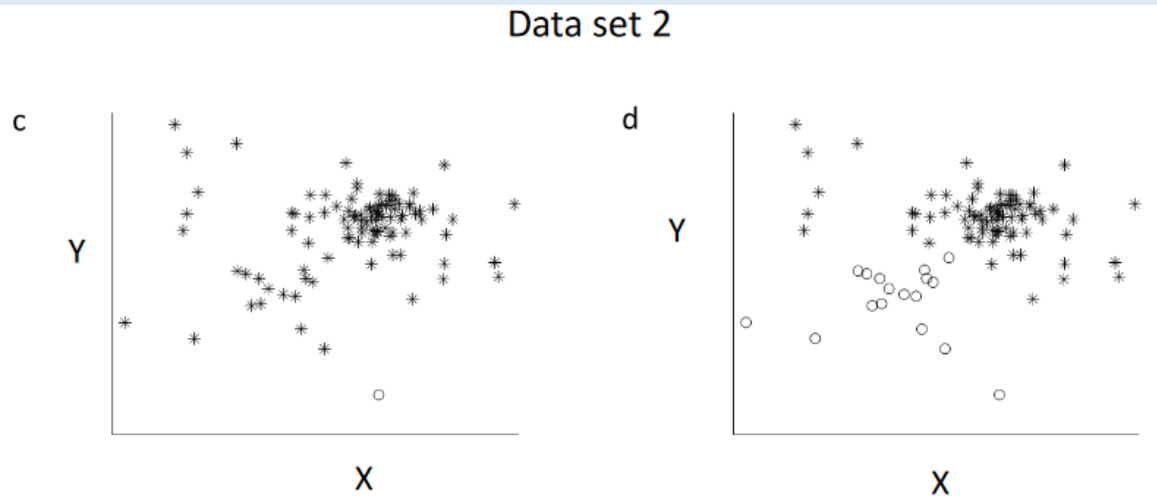
ממנה התקבלה חלוקה לשתי קבוצות (מסומנות

על ידי עיגולים וכוכבים באיורים). סמנו את המשפט

הנכון ביותר:



Data set 2



א. a ו-d יכולים להתקבל אך ורק ע"י kmeans בעוד ש-b ו-c יכולים להתקבל אך ורק ע"י אשכול הררכי.

ב. a ו-d שיטת חיבור המדידות היא complete linkage בעוד ש-b ו-c שיטת החיבור היא single linkage

ג. a ו-d שיטת חיבור המדידות היא single linkage בעוד ש-b ו-c שיטת החיבור היא complete linkage

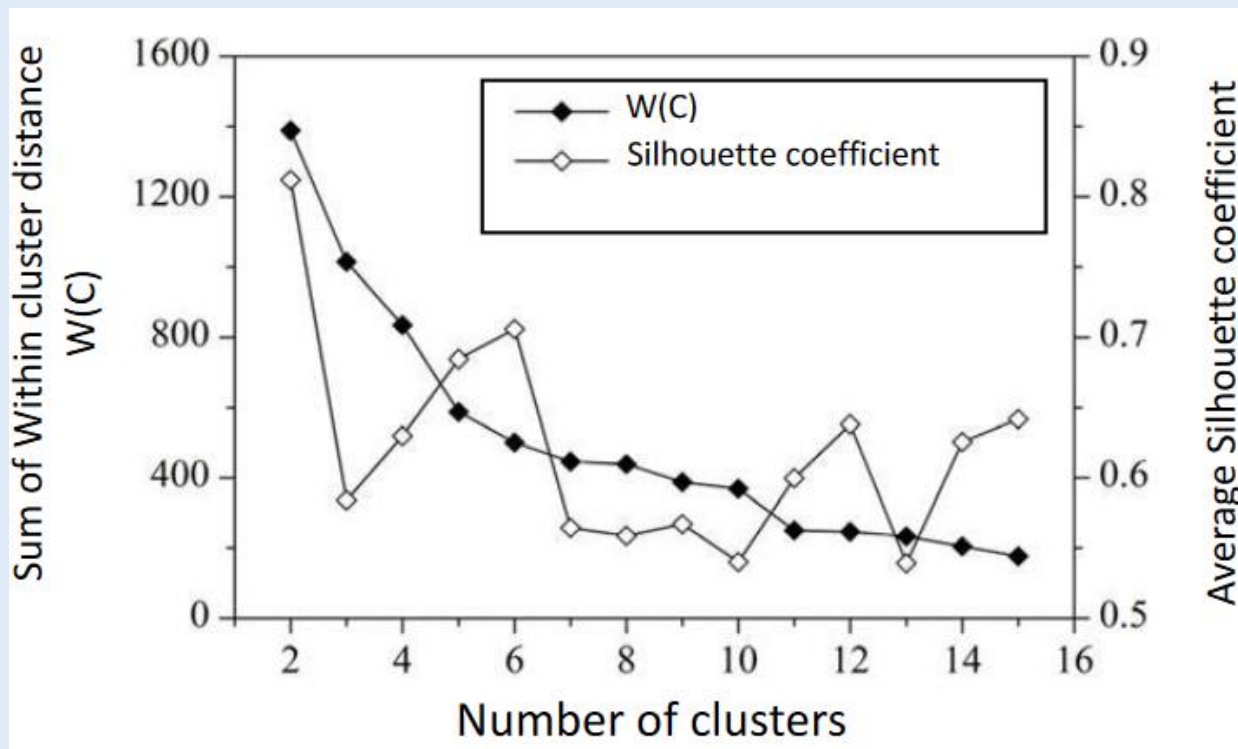
ד. a ו-c שיטת חיבור המדידות היא complete linkage בעוד ש-b ו-d שיטת החיבור היא single linkage

ה. a ו-d יכולים להתקבל אך ורק ע"י אשכול הררכי בעוד ש-b ו-c יכולים להתקבל אך ורק ע"י kmeans

מועד ב' 2018 – שאלה 17

נושא:
kMeans,
scree,
silhouette

נתון גרף המנתח נתונים רב מימדים שעברו אשכול ע"י K-means כאשר מספר האשכולות, K , שונה. מה מספר האשכולות שהיית בוחר כך שהאשכול יהיה אופטימלי?



- א. 3
- ב. 10
- ג. 5 או 6
- ד. 11 או 12

מועד ב' 2019 – שאלה 13

נושא:
PCA

חוקר ביצע PCA עבור דאטה בו נמדדו עשרה מדדים. החוקר קיבל שאחוז השונות המוסברת ב-PC1 הוא 81% , ב-PC2 הוא 17% ובסכום כל השונות המוסברת ע"י PC אחרים הינה 1%. באיזה PCs כדאי לו להשתמש להמשך האנליזה?

א . ב-PC1 בלבד כי הוא מסביר את החלק הגדול ביותר של השונות בדאטה .

ב . בכל ה-PCs מכיוון שכל אחד מוסיף עוד שונות מוסברת .

ג . ב-PC1 וב-PC2 כי הדאטה ככל הנראה הגיע ממרחב דו-מימדי, PC3 ומעלה הם ככל הנראה רעש .

ד . ב-PC1 וב-PC2 אלא אם כן ברור לחוקר שהתפלגות הנותנים באחד ה-PCs האחרים תופסת מימד

החשוב לשאלת המחקר

מועד א' 2017 – שאלה 19

נושא:
PCA

מתי יש לבצע נרמול ממדים (z-score/scaling) לפני אנליזת PCA?

א. תמיד

ב. אף פעם

ג. כשהממדים נתונים ביחידות שונות ונרצה לנטרל את השפעת זו

ד. כשלממדים שונות שונה ונרצה לנטרל השפעה זו

מועד ב' 2016 – שאלה פתוחה 4

נושא:
PCA

1. האם ל-kMeans עם $k=2$ בהכרח יוביל לחלוקה של הדוגמאות לאותם 2 קבוצות שהחוקרת זיהתה? נמק את תשובתך.
2. האם ביצוע PCA רק על 15000 הגנים שלא זהו כשונים ב-T-test יכול לגרום לירידה במספר תתי הקבוצות? החוקרת לזהות ב-PCA? נמק את תשובתך.
3. תאר את טיב היחס בין הגנים שנמצאו שונים לבין המקדמים במטריצת ה-coefficients של הציר הראשון.

חלוקת נקודות:

סעיף א: (1 נקודה)
1/2 - יש לפחות נימוק אחד נכון
1/2 - אין נימוקים לא נכונים

סעיף ב (שתי נקודות)
1/2 - תשובה נכונה ללא קשר לנימוק
1 - יש לפחות נימוק אחד נכון.
1/2 - אין נימוקים לא נכונים.

סעיף ג (שתי נקודות)
מצויין שהמקדמים של הגנים שנמצאו יהיו גדולים



בהצלחה!