קונבולוציה ומשוואות ליניאריות בדו-מימד

תרגיל כיתה 3

בני פרץ ו מעיין ברילר

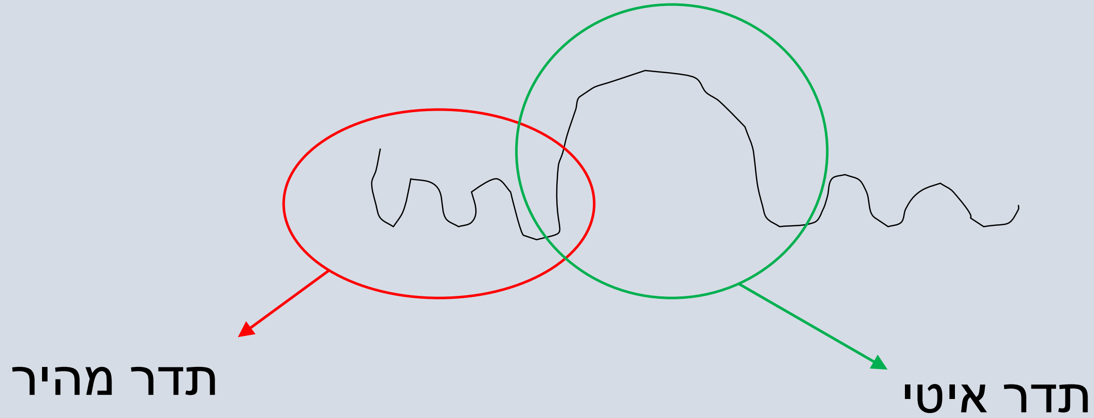
τ ו-q של המערכת קובעים את התגובה שלה לקלטים

<u>תזכורת:</u>

q (או τ) הוא <u>תכונה של המערכת</u> – כלומר, כל קלט שאנחנו מקבלים – פשוט או מורכב – יעובד על ידי המערכת ו<u>מגבלותיה</u>. ככל ש-τ יותר גדול (או q יותר קטן) כך למערכת לוקח יותר זמן להגיע ל-63% מהדרך.

- קלט שמתנהג יותר מהר מהמערכת "יבלע" על ידה ויוחלק
- קלט יותר איטי מהמערכת יקלט בשלמותו

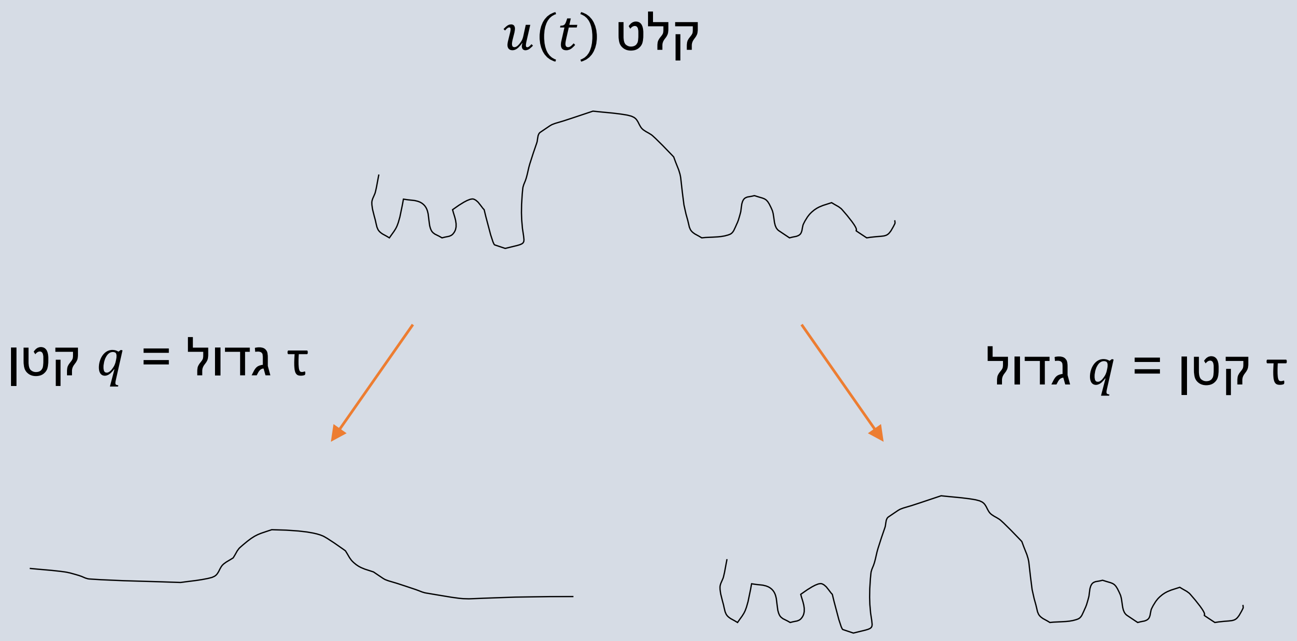
קלט $u(t)$:



שימו לב ❤️ היחידות של τ (זמן אופייני) – הן יחידות של <u>זמן</u> ולכן היחידות של $q = \frac{1}{\tau}$ הן 1 חלקי הזמן שזה גם <u>תדר</u>. לכן, ערכי q שונים הם בעצם תדרים שונים של המערכת.

τ ו-q של המערכת קובעים את התגובה שלה לקלטים

עד עכשיו, היה קלט יחיד וריבועי. אך מה עושים עם קלטים מורכבים?



עיבוד הקלט הזה תלוי ב-τ – אם τ גדול, למערכת יקח יותר זמן לעבד את השינויים ואנחנו נראה רק את התדרים האיטיים ("החלקה")

אם τ קטן, למערכת יקח פחות זמן לעבד את השינויים ואנחנו נראה גם את השינויים המהירים

קונבולוציה עוזרת לנו להתמודד עם קלטים מורכבים

ניתן לפתור בעיות עם קלט מורכב גם עם פתרון יותר אנליטי:

נניח וניתנה לנו מערכת עם קלט מורכב תלוי בזמן

$$\frac{dx}{dt} = -qx + u(t)$$

אזי הפתרון של המערכת ניתן על ידי: (מה ההבדל מהנוסחה של תרגול קודם ?)

$$x(t) = x(0) \cdot e^{-qt} + \int_0^t u(s) e^{-q(t-s)} ds$$

שימו ❤️ אם תנאי ההתחלה שלנו הוא אפס, האיבר הראשון מתבטל ונשארים עם:

$$x(t) = \int_0^t u(s) e^{-q(t-s)} ds$$

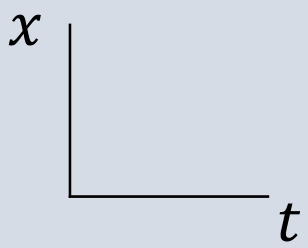
מבוא למערכות דו-מימדיות

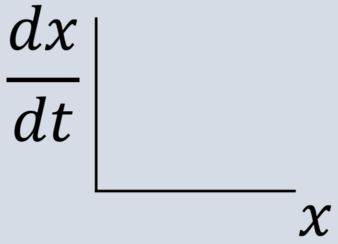
כאשר יש לנו מערכת דו-מימדית בה יש שני משתנים:

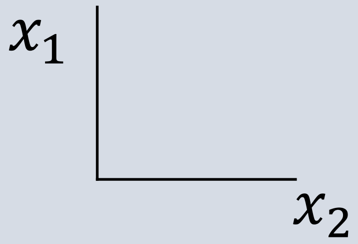
- לכל אחד יש את נקודת השבת שלו
- כל אחד מתנהג אחרת

אבל איך הם מתנהגים יחד באותה המערכת?

איך הם מתנהגים אחד כתלות בשני?







מרחב הפאזה

מבוא למערכות דו-מימדיות

כאשר יש לנו מערכת דו-מימדית יש לנו מערכת משוואות:

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x_1} = ax_1 + bx_2 + B_1 \\ \dot{x_2} = cx_1 + dx_2 + B_2 \end{cases}$$

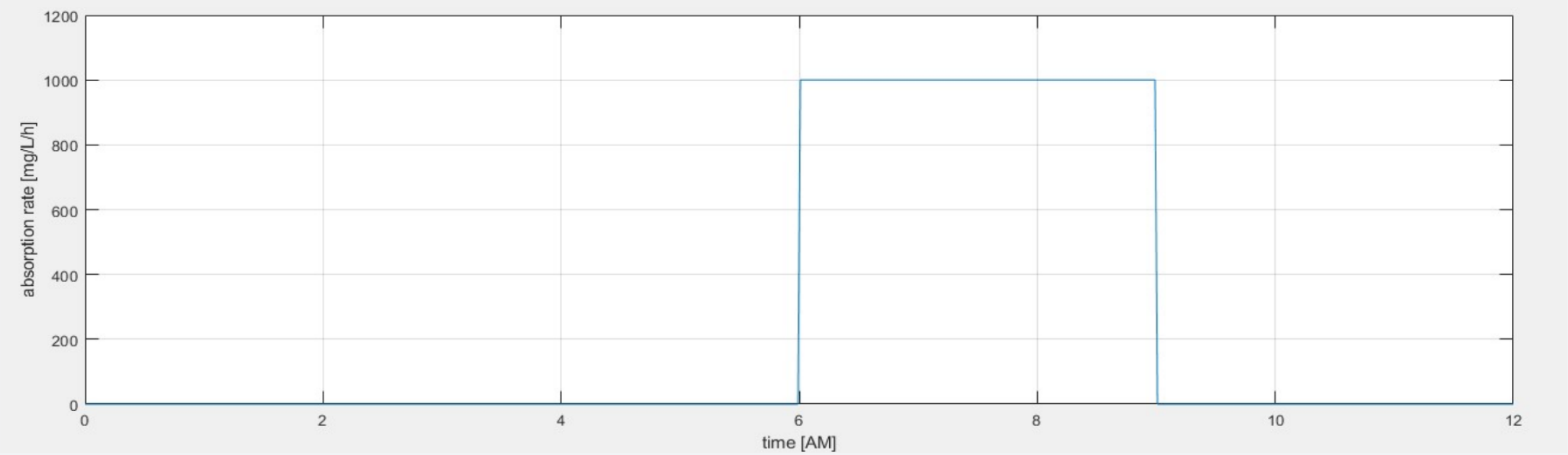
כל מערכת משוואות ניתן לייצג באמצעות מטריצה

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + B$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

פתרון תרגיל בית - 1

ילד בן 4 שנים נטל בבת אחת 3000 מ"ג פאראצטמול בשעה 6:00 בבוקר. בקירוב, לצורך חישוב תאורטי, התרופה נספגת לדם בצורה אחידה למשך 3 שעות. קצב הספיגה של פאראצטמול לדם (בהתאם לנפח הדם של הילד) הוא:



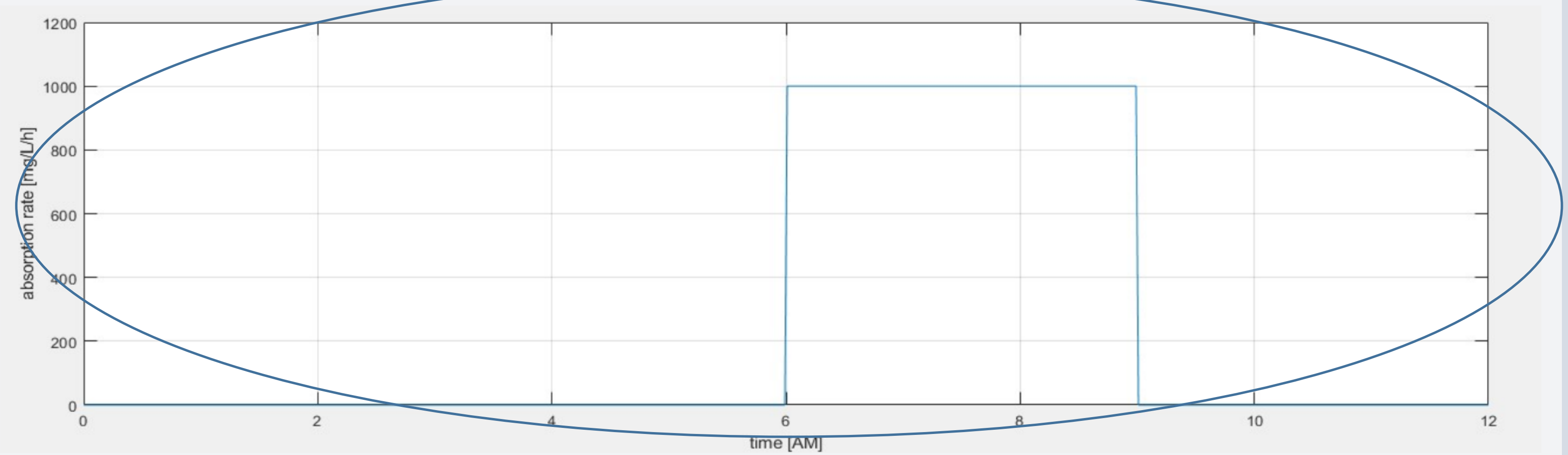
בהינתן כי זמן מחצית החיים של התרופה בגוף הוא שעתיים. והסף הטוקסי של ריכוז פראצטמול בדם הנו 150 מיליגרם לליטר. האם צריך להתקשר לאמבולנס/להבהיל את הילד לבית החולים? (שימו לב ליחידות)

מה המשתנה שלנו? כמות התרופה בדם

מה הפרמטרים החשובים ? גרף הקלט למערכת, מידע על זמן מחצית החיים והסף הטוקסי.

פתרון תרגיל בית - 1

ילד בן 4 שנים נטל בבת אחת 3000 מ"ג פאראצטמול בשעה 6:00 בבוקר. בקירוב, לצורך חישוב תאורטי, התרופה נספגת לדם בצורה אחידה למשך 3 שעות. קצב הספיגה של פאראצטמול לדם (בהתאם לנפח הדם של הילד) הוא:



בהינתן כי זמן מחצית החיים של התרופה בגוף הוא שעתיים והסף הטוקסי של ריכוז פראצטמול בדם הנו 150 מיליגרם לליטר. האם צריך להתקשר לאמבולנס/להבהיל את הילד לבית החולים? (שימו לב ליחידות)

מה המשתנה שלנו? כמות התרופה בדם

מה הפרמטרים החשובים ? גרף הקלט למערכת, מידע על זמן מחצית החיים והסף הטוקסי.

פתרון תרגיל בית - 1

אבל מה זה בעצם זמן מחצית חיים ?

נניח והזריקו לילד X_0 מיליגרם של תרופה ישירות לדם ברגע אחד, כמה זמן ייקח לתרופה לדעוך למחצית מהכמות הזו בגוף ? שימו לב, זו תכונה של המערכת ! (גוף הילד)

$$x(t_{0.5}) = x(0) \cdot e^{-qt} + \int_0^t u(s) e^{-q(t-s)} ds$$

פתרון תרגיל בית - 1

אבל מה זה בעצם זמן מחצית חיים ?

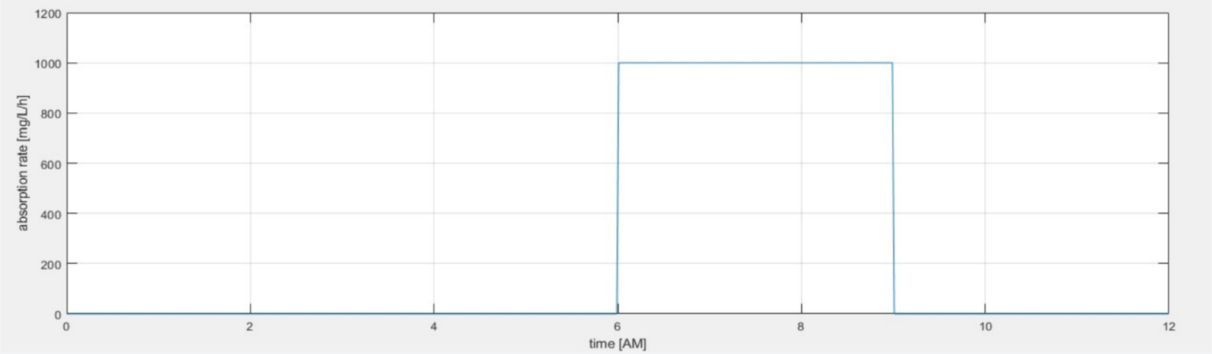
ניח והזריקו לילד X_0 מיליגרם של תרופה ישירות לדם ברגע אחד, כמה זמן ייקח לתרופה לדעוך למחצית מהכמות הזו בגוף ? <u>שימו לב, זו תכונה של המערכת ! (גוף הילד)</u>

$$x(t_{0.5}) = x(0)\cdot e^{-qt} + \int_0^t u(s)e^{-q(t-s)}ds = X_0 e^{-qt_{0.5}} + 0 = 0.5\cdot X_0$$

$$e^{-q\cdot 2} = 0.5 \Rightarrow \boxed{q = 0.5\cdot \ln(2)}$$

פתרון תרגיל בית - 1

ילד בן 4 שנים נטל בבת אחת 3000 מ"ג פאראצטמול בשעה 6:00 בבוקר. בקירוב, לצורך חישוב תאורטי, התרופה נספגת לדם בצורה אחידה למשך 3 שעות. קצב הספיגה של פאראצטמול לדם (בהתאם לנפח הדם של הילד) הוא:



בהינתן כי זמן מחצית החיים של התרופה בגוף הוא שעתיים. והסף הטוקסי של ריכוז פראצטמול בדם הנו 150 מיליגרם לליטר. האם צריך להתקשר לאמבולנס/להבהיל את הילד לבית החולים? (שימו לב ליחידות)

אז מה הבעיה אותה אנחנו פותרים ?

$$\dot{X} = u - qX$$

קלט חיצוני (ריכוז תרופה) למערכת (הדם)

דעיכת הקלט במערכת

פתרון תרגיל בית - 1

אז מה הבעיה אותה אנחנו פותרים ?

$$\dot{X} = u - qX = 1000 - 0.5 \cdot ln(2) \cdot X$$

פתרון תרגיל בית - 1

אז מה הבעיה אותה אנחנו פותרים ?

$$\dot{X} = u - qX = 1000 - 0.5 \cdot ln(2) \cdot X$$

$$X(t) = \frac{1000}{0.5 \cdot ln(2)}\left(1 - e^{-0.5 \cdot ln(2) \cdot t}\right) = \frac{2000}{ln(2)}\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t}\right)$$

פתרון תרגיל בית - 1

אז מה הבעיה אותה אנחנו פותרים ?

$$\dot{X} = u - qX = 1000 - 0.5 \cdot ln(2) \cdot X$$

$$X(t) = \frac{1000}{0.5 \cdot ln(2)}\left(1 - e^{-0.5 \cdot ln(2) \cdot t}\right) = \frac{2000}{ln(2)}\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t}\right)$$

בהינתן כי זמן מחצית החיים של התרופה בגוף הוא שעתיים. והסף הטוקסי של ריכוז פראצטמול בדם הנו 150 מיליגרם לליטר. האם צריך להתקשר לאמבולנס/להבהיל את הילד לבית החולים? (שימו לב ליחידות)

יש לבחור תשובה אחת:

- ○ נכון
- ○ לא־נכון

קל לראות שאנחנו עוקפים את המינון הטוקסי בקלות. לדוגמא, $X(t=2) = \frac{1000}{ln(2)}$.

פתרון תרגיל בית - 1

אז מה הבעיה אותה אנחנו פותרים ?

$$X(t) = \frac{2000}{ln(2)}\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t}\right)$$

מהו הריכוז המכסימלי של פאראצטמול בדם הילד במידה ולא הייתה התערבות רפואית בהינתן שהדיווח של ההורים הינו דיווח מדויק? ביחידות של מ"ג לליטר

תשובה:

פתרון תרגיל בית - 1

אז מה הבעיה אותה אנחנו פותרים ?

$$X(t)=\frac{2000}{ln(2)}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t}\right)$$

כפי שניתן לראות, $X(t)$ גדל ככל ש t גדל. לכן, נבחר את ה t המקסימלי האפשרי t=3 (למה?)

כפי שניתן לראות, $X(t)$ גדל ככל ש t גדל. לכן, נבחר את ה t המקסימלי האפשרי t=3 (למה?)

$$X(t)=\frac{2000}{ln(2)}\left(1-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right)=1865.250$$

פתרון תרגיל בית - 1

אז מה הבעיה אותה אנחנו פותרים ?

$$X(t) = \frac{2000}{ln(2)}\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t}\right)$$

ההורים לא התייעצו ומיהרו למיון. מתברר כי אין צורך לעשות שטיפת קיבה לילד מפני שכנראה לא בלע את כל הכמות המתוארת על ידי ההורים והריכוז המכסימלי אשר התקבל בדם הנו 100 מיליגרם לליטר. אחרי כמה זמן (בשעות) יהיה הריכוז בדם 50 מיליגרם לליטר?

תשובה:

פתרון תרגיל בית - 1

אז מה הבעיה אותה אנחנו פותרים ?

$$X(t) = \cancel{\frac{2\ldots}{l\ldots}}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t}\right)$$

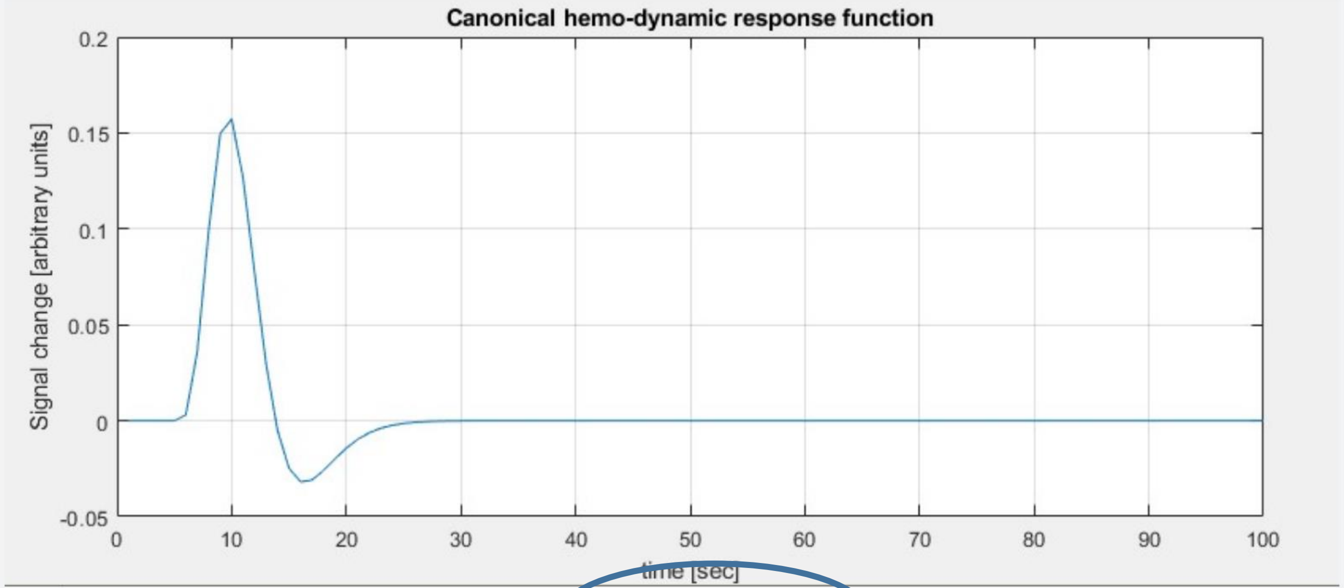
ההורים לא התייעצו ומיהרו למיון. מתברר כי אין צורך לעשות שטיפת קיבה לילד מפני שכנראה לא בלע את כל הכמות המתוארת על ידי ההורים והריכוז המכסימלי אשר התקבל בדם הנו 100 מיליגרם לליטר. אחרי כמה זמן (בשעות) יהיה הריכוז בדם 50 מיליגרם לליטר?

תשובה:

אין צורך במשוואה, זמן מחצית החיים נתון לנו.

פתרון תרגיל בית - 2

במודליות דימות BOLD-fMRI, מודד מכשיר ה-MRI באופן עקיף את רמת חמצון הדם במקומות שונים במח, מדד זה יכול להיות אינפורמטיבי ביותר לגבי אזורים פעילים במצב מנוחה באופן כללי או בעת ביצוע מטלה מסוימת, שכן פעילות נוירונלית בתחום קטן במרחב המוח גורמת לתגובה הבאה ברמת החמצון בנימים השכנים: (זאת תגובה שמתקבלת מהפעלה אחת ואחרי סינון)



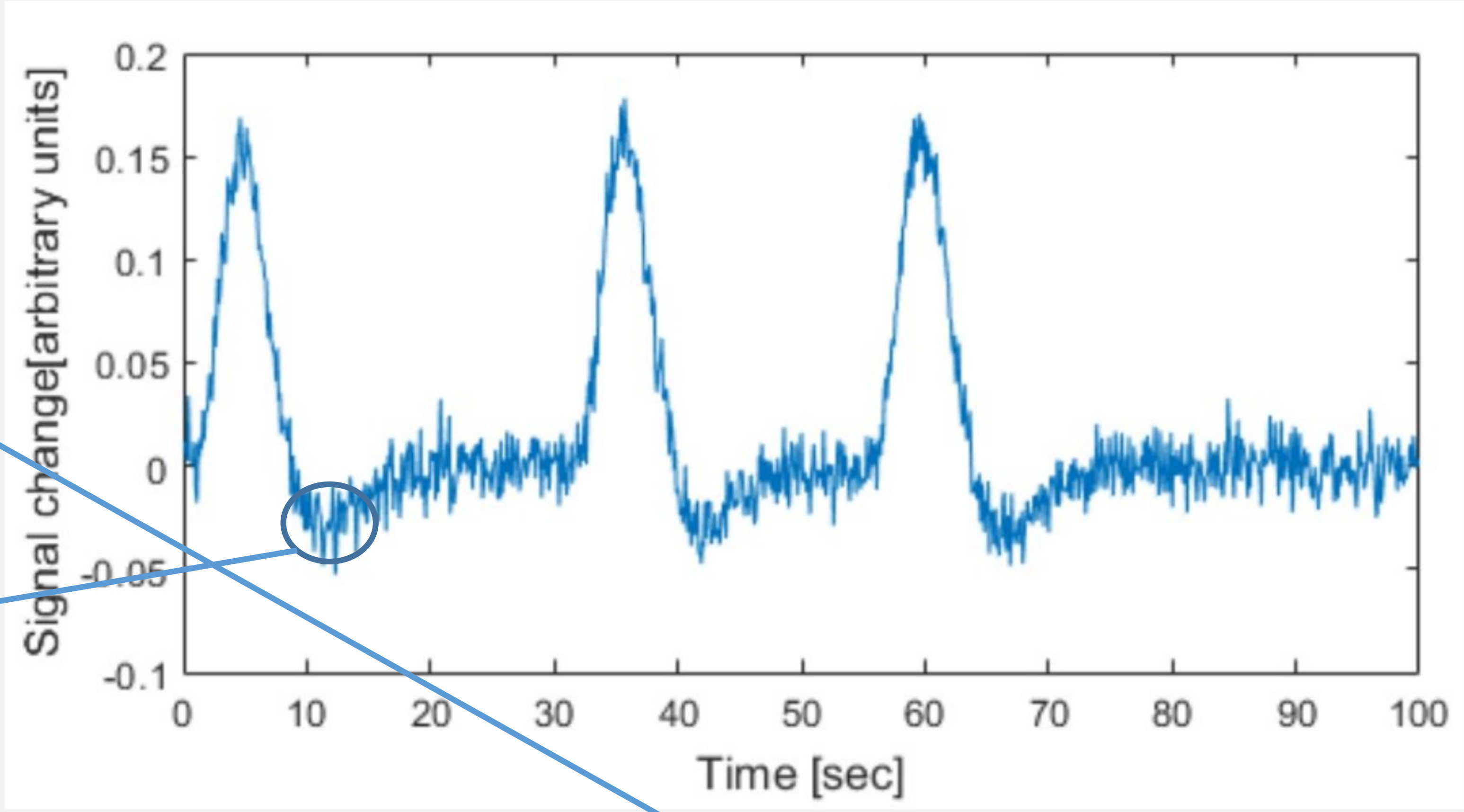
ניתן להניח שבקירוב טוב התגובה ההמודינמית הנה בעלת זמן מחזור של 15 שניות.

פתרון תרגיל בית - 2

$$q = \frac{1}{\tau} = 10 \Rightarrow \tau = 0.1$$

מה תדר הרעש בקירוב?

כעת מתקבלת התוצאה הגולמית הבאה לפני עיבוד וסינון. מעניין אותנו לבדוק את יכולתנו בסינון האות בעזרת הכלים אותם רכשנו בהרצאה:



נניח כי אות זה הנו אות כניסה למערכת דינמית אשר מתוארת על ידי המשוואה הדיפרנציאלית:

$$\frac{dx}{dt} = -q \cdot x(t) + u(t)$$

מה יהיה הפלט של המערכת הדינמית - X, כאשר q=10?

פתרון תרגיל בית - 2

משוואת המערכת :

$$x(t) = x(0) \cdot e^{-qt} + \int_0^t u(s)e^{-q(t-s)}ds$$

איך כל נקודה ב u משפיעה על האות ב t?

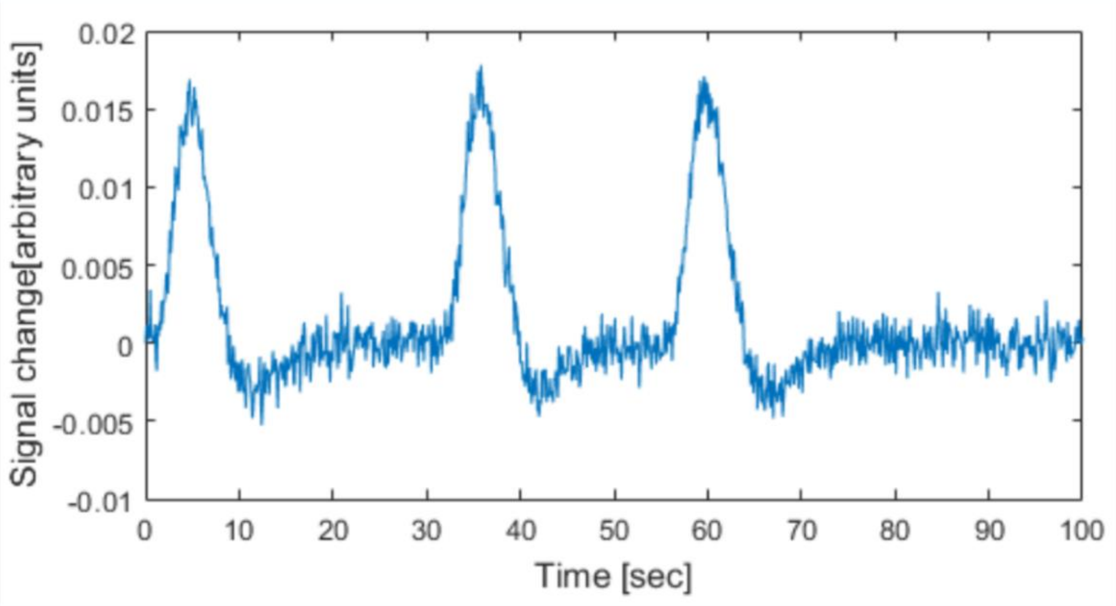
מאיפה זה מוכר לנו ? קונבולוציה !!

$$\boldsymbol{X(t) = u(t) * e^{-q \cdot t} = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)e^{-q(t-s)} = \int_{0}^{t} u(s)e^{-q(t-s)}}$$

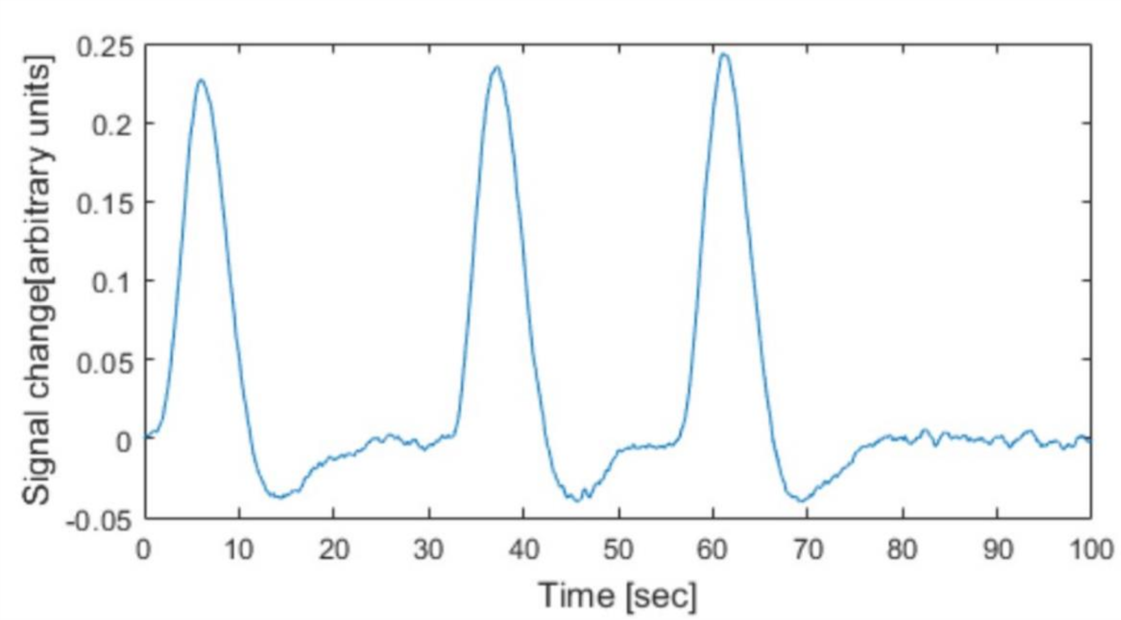
e^{-q*t} הוא בעצם LPF ! $(\frac{1}{q+i*f})$, ככל ש q גדל (או τ קטן) -> המערכת "מעבדת" את האות מהר יותר -> מעבירה תדרים גבוהים יותר.

פתרון תרגיל בית - 2

1.

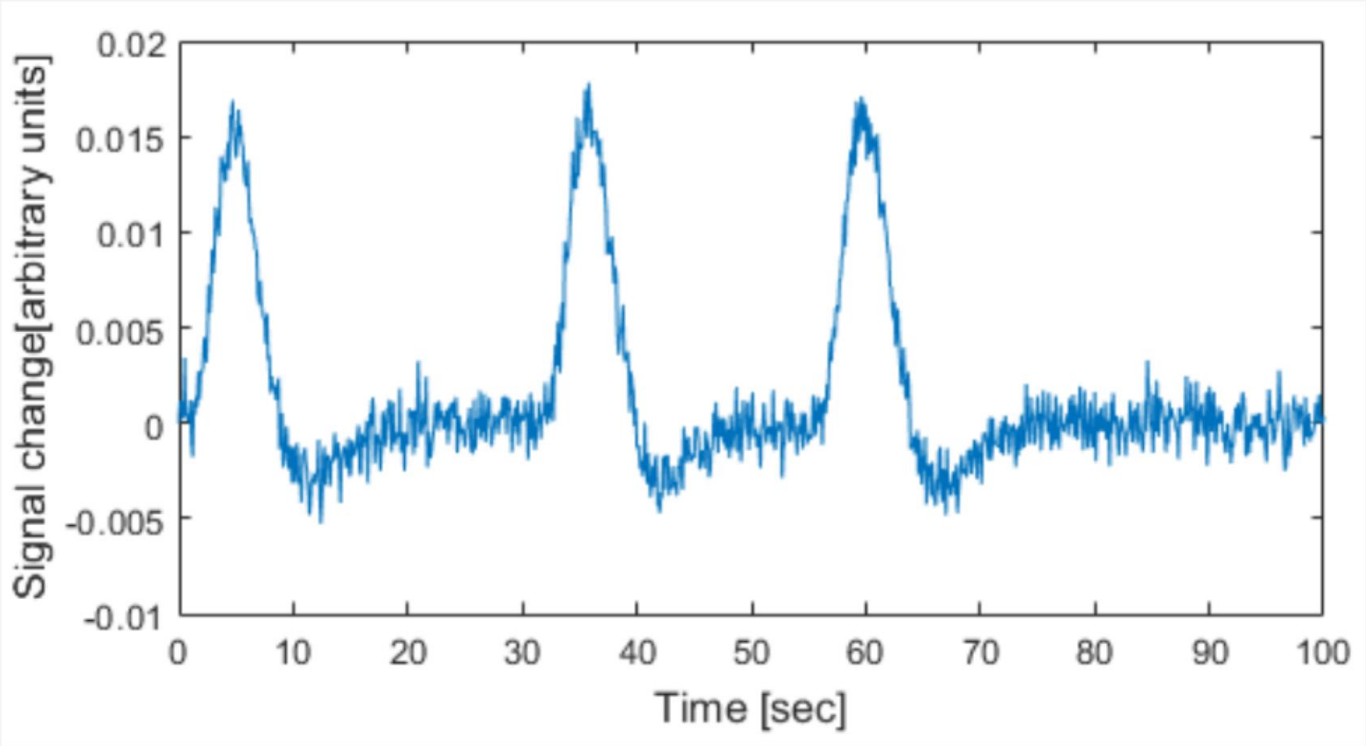


2.



פתרון תרגיל בית - 2

1.



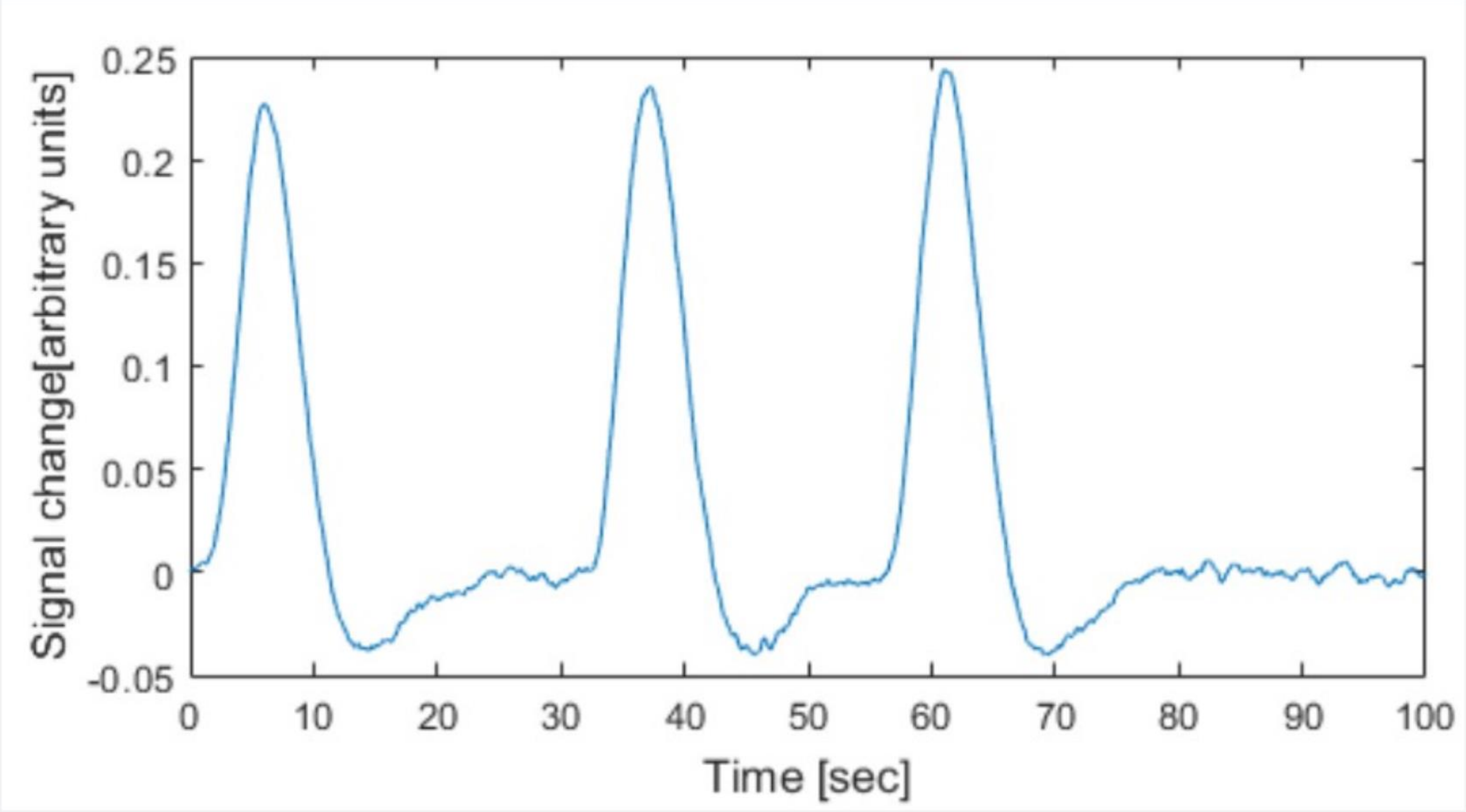
כמו שניתן לראות, זמן התגובה האופייני של המערכת קרוב לזמן המאפיין את התדרים הגבוהים באות, לכן ניתן לצפות שהאות יישמר אותם.

פתרון תרגיל בית - 2

במידה ושינינו את q ל- 0.5, מה תהיה התוצאה?

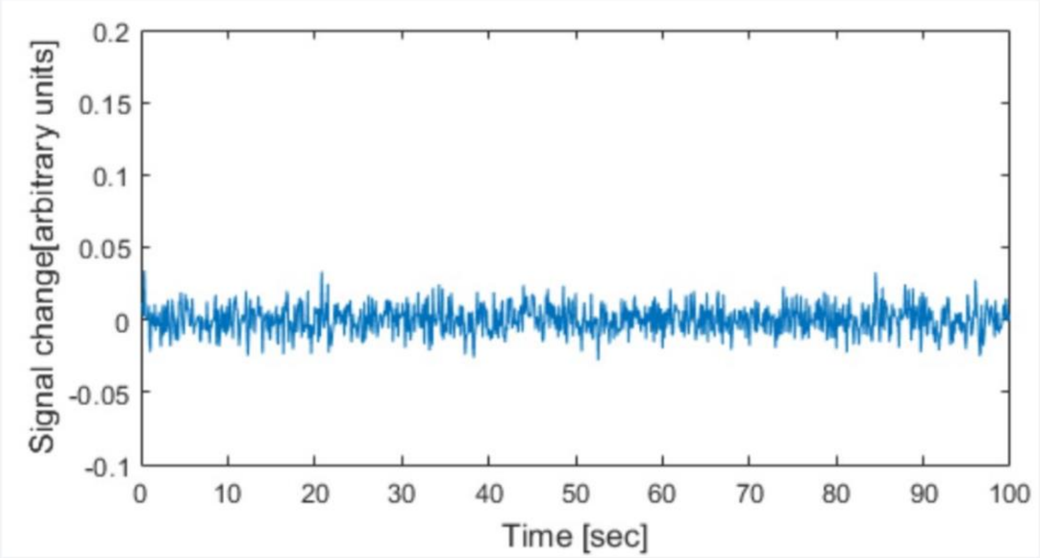
$$q = \frac{1}{\tau} = 0.5 \Rightarrow \tau = 2$$

.2



ניתן לראות שכעת המערכת תעבד שינויים לאט יותר, ולכן תדרים גבוהים יאבדו.

פתרון תרגיל בית - 2

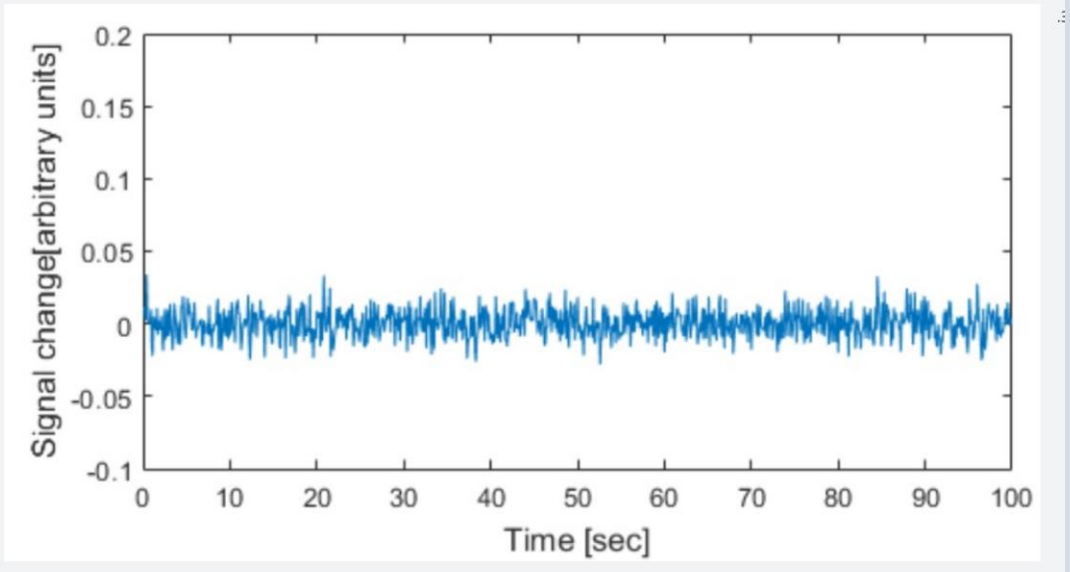


עבור איזה ערכים של q נקבל במוצא את הגרף השלישי?

יש לבחור תשובה אחת:

1. עבור $q>2$
2. לא ניתן לקבל גרף זה באמצעות המערכת הדינמית שלמדנו
3. עבור $q<0.25$
4. עבור $q<1/15$

פתרון תרגיל בית - 2



עבור איזה ערכים של q נקבל במוצא את הגרף השלישי?

יש לבחור תשובה אחת:

1. עבור q>2
2. לא ניתן לקבל גרף זה באמצעות המערכת הדינמית שלמדנו
3. עבור q<0.25
4. עבור q<1/15

איזה מסנן דרוש לנו כדי לקבל אות כזה ?(HPF) איזה מסנן יש לנו ? (LPF)

פתרון תרגיל בית - 3

נתון לכם כעת מערכת דינמית לינארית דו-מימדית, אשר מתוארת על ידי צמד המשוואות:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -10x_2 + 10$$

איך מציגים את מערכת המשוואות הדפרנציאליות בצורה מטריצית?

יש לבחור תשובה אחת:

.1 ○ $$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

.2 ○ $$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

.3 ○ $$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

.4 ○ $$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

נוודא על ידי שימוש
בכפל מטריצות על הלוח

פתרון תרגיל בית - 3

נתון לכם כעת מערכת דינמית לינארית דו-מימדית, אשר מתוארת על ידי צמד המשוואות:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -10x_2 + 10$$

איך מציגים את מערכת המשוואות הדפרנציאליות בצורה מטריצית?

יש לבחור תשובה אחת:

1. $$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

נוודא על ידי שימוש
בכפל מטריצות על הלוח

פתרון תרגיל בית - 3

מהי נקודת השבת?

יש לבחור תשובה אחת:

1. (2,10)
2. (10,2)
3. (2,1)
4. (1,2)

פתרון תרגיל בית - 3

שימו לב שבשאלה זו קל מאוד למצוא את נקודת השבת :

$$\dot{X}_1 = -X_1 + 2 \Rightarrow X_1 = 2$$
$$\dot{X}_2 = -10 \cdot X_2 + 10 \Rightarrow X_2 = 1$$

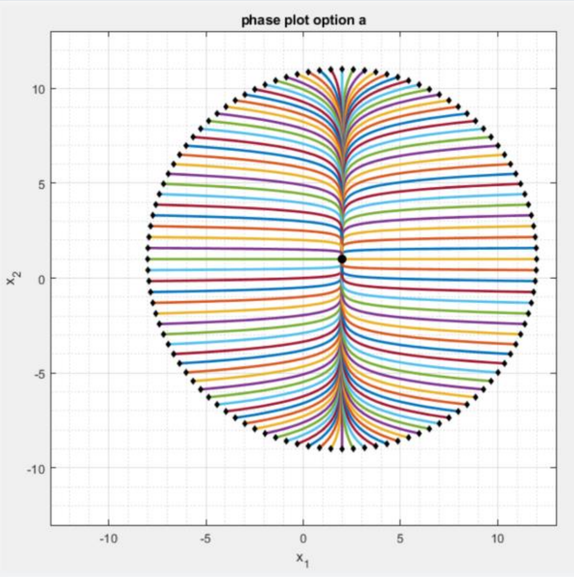
מהי נקודת השבת?

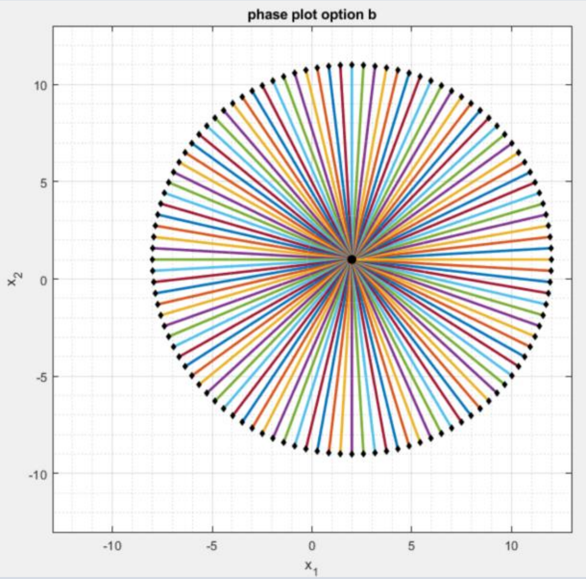
יש לבחור תשובה אחת:

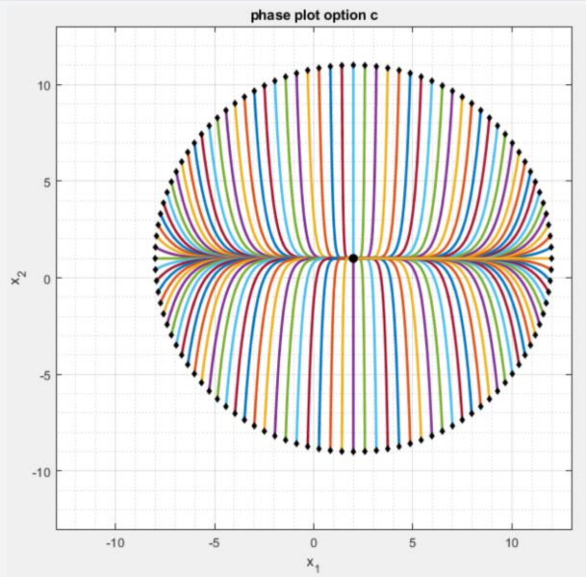
1. (2,10)
2. (10,2)
3. (2,1)
4. (1,2)

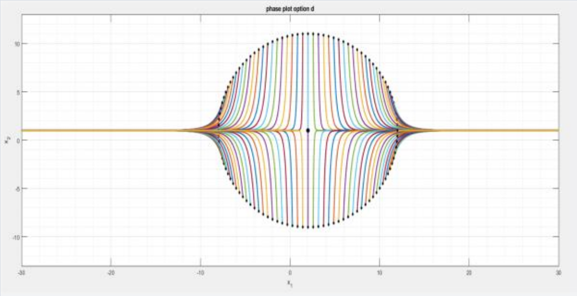
פתרון תרגיל בית - 3

בהנחה והרצנו את המערכת הדינמית מספר רב של פעמים עם תנאי התחלה שונים (מסומנים במעוינים) שנמצאים בהיקף עיגול שבמרכזו נקודת השבת של המערכת הדינמית, איך ייראו הסימולציות?







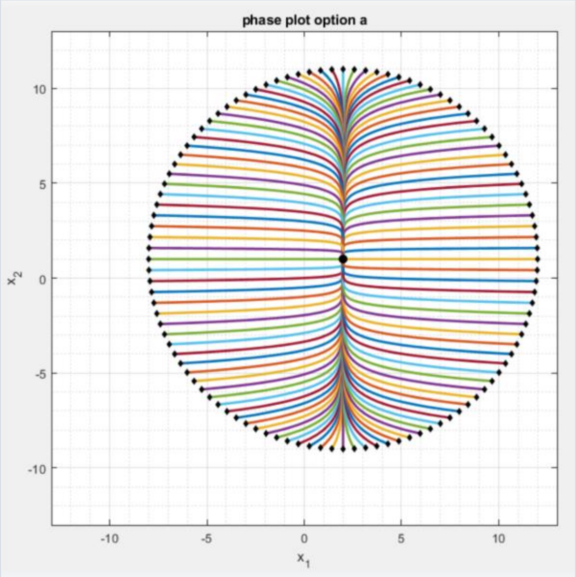


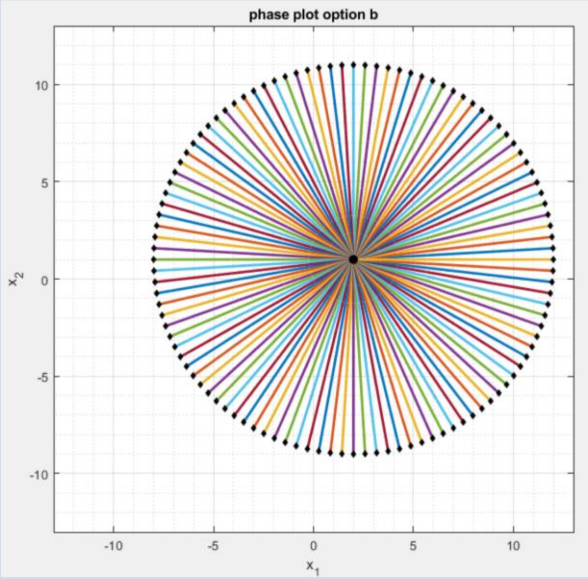
$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2$$

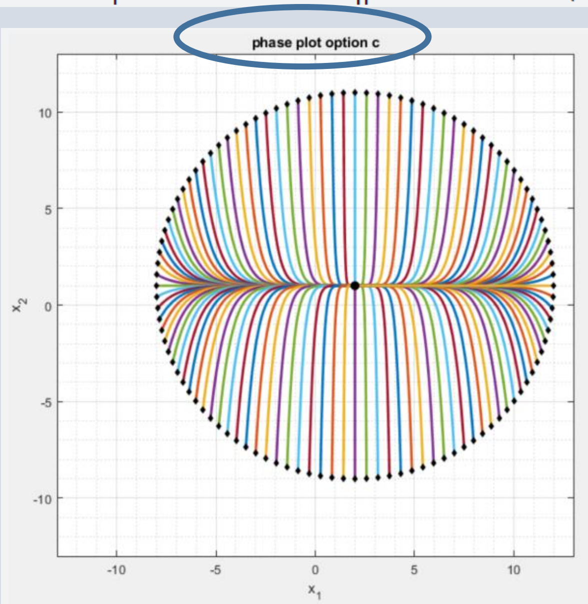
$$\frac{dx_2}{dt} = -10x_2 + 10$$

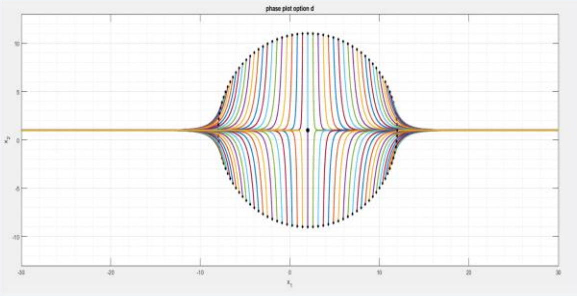
פתרון תרגיל בית - 3

בהנחה והרצנו את המערכת הדינמית מספר רב של פעמים עם תנאי התחלה שונים (מסומנים במעוינים) שנמצאים בהיקף עיגול שבמרכזו נקודת השבת של המערכת הדינמית, איך ייראו הסימולציות?









למה לא זה ?

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -10x_2 + 10$$

מה ניתן לדעת על המערכת :

1) שני הממדים לא תלויים
2) הממד השני שואף לשבת הרבה יותר מהר
3) נקודת השבת יציבה