

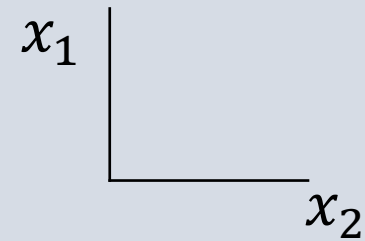
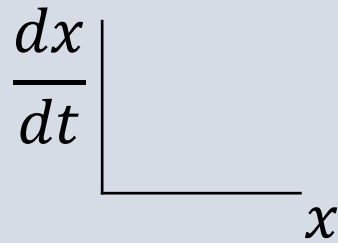
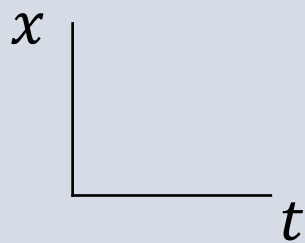
משוואות לינאריות בדו-מימד

תרגיל כיתה 4

מבוא למערכות דו-מימדיות

כאשר יש לנו מערכת דו-מימדית בה יש שני משתנים:

- לכל אחד יש את נקודת השבת שלו
- כל אחד מתנהג אחרת
- הם תלויים זה בזה



מרחב הפאזה

מבוא למערכות דו-מימדיות

אפשר לייצג מערכת דו-מימדית עם מערכת משוואות:

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 + B_1 \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 + B_2 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + B$$

כל מערכת משוואות ניתן לייצג באמצעות מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

המטריצה A היא תכונה של המערכת

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

לכל מטריצה ריבועית ($N \times N$) ו-ווקטור v מתקיים:

$$Av = \lambda v$$

שימו לב זהו כפל מטריצות ולכן אי אפשר לחלק ב- v ☺

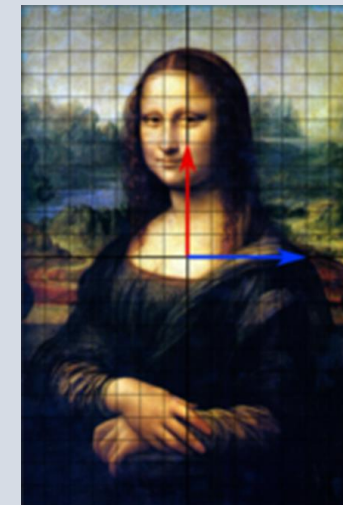
v נקרא ווקטור עצמי (eigenvector) – לכל מטריצה ריבועית קיימים מספר ווקטורים עצמיים

λ נקרא ערך עצמי (eigenvalue) – לכל ווקטור עצמי יש ערך עצמי אחד

λ ו- v הם תכונות של המטריצה A .

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \tau = a + d \\ \Delta = ad - bc \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$



פתרון מערכת לינארית דו-מימדית ללא קלט

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax \qquad \dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

↙

$$\dot{x} = \lambda_1 \cdot c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2$$

1. המקדמים של x_1, x_2 מצביעים על יציבות המערכת:

כאשר $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ המערכת יציבה, ואחרת לא.

2. נקודת השבת שלנו היא כאשר $\dot{x}_1 = 0$ ו- $\dot{x}_2 = 0$

אפשר להניח שכל פעם שיש מערכת לינארית שאין בה קלט נקודת השבת היא בראשית $(0,0)$. דרכים נוספות לראות את זה:

(1) הוקטור שמאפס את הנגזרת הוא וקטור האפס, (2) כאשר שני הערכים העצמיים שליליים, הפתרון דועך לאפס

3. המערכת דועכת/גדלה כתלות בערכים העצמיים – מכיוון שהם החזקה של האקספוננט – אבל המהירות נקבעת לפי הע"ע האיטי

פתרון מערכת לינארית דו-מימדית ללא קלט

כשאנחנו מציירים מערכת דו-מימדית במרחב הפאזה ($x_2 \sim x_1$) נצייר שני סוגי עקומים:

1. **עקומי אפס (nullclines)** בהם הנגזרת של כל אחד מהמשתנים מתאפסת ואין עליהם תנועה באותו המשתנה

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \rightarrow x_1 \text{ nullcline, no movement on } x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 \rightarrow x_2 \text{ nullcline, no movement on } x_2$$

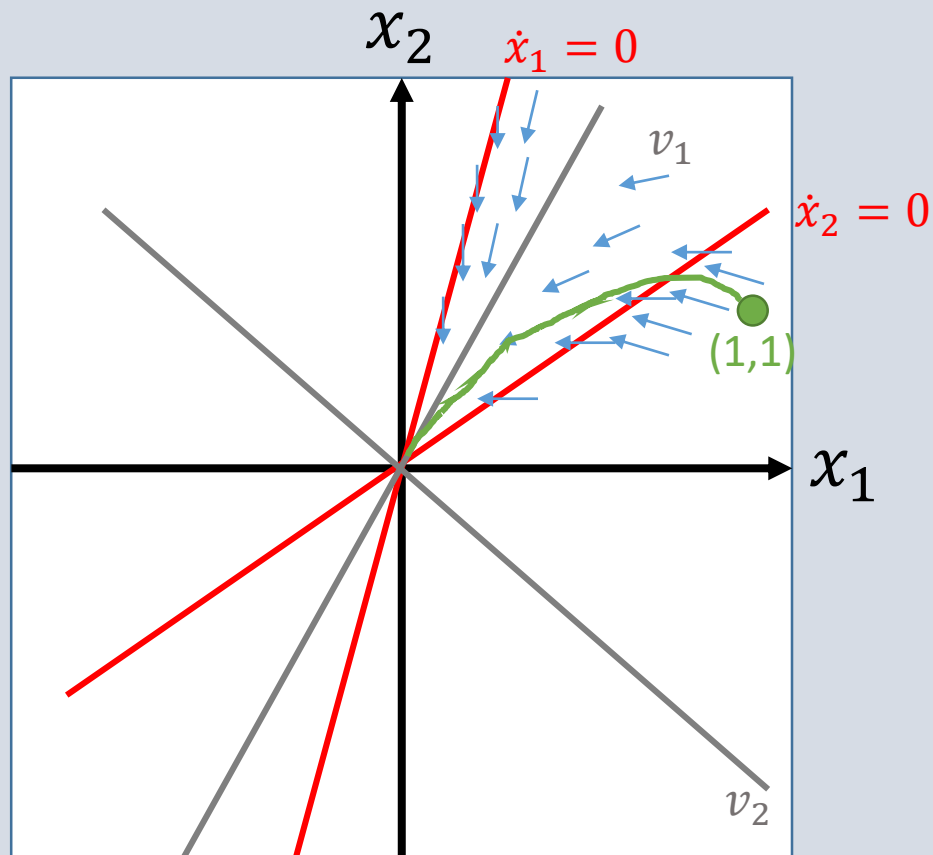
2. **וקטורים עצמיים** – עליהם המטריצה לא עושה שינוי בכיוון הכללי במרחב (מקסימום קדימה-אחורה על הקו)

$$Av = \lambda v \rightarrow v_1, v_2$$

בנוסף נצייר גם **כיווני תנועה במרחב** באמצעות חיצים

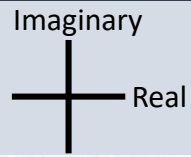
דוגמא משאלות ההבנה

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x$$
$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -6$$



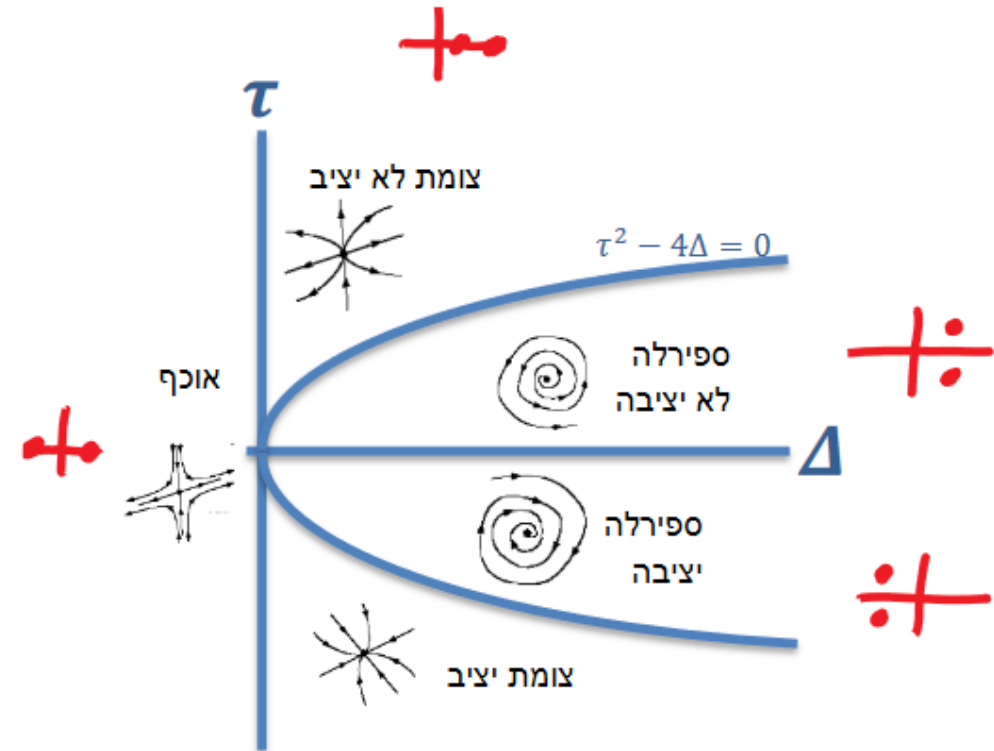
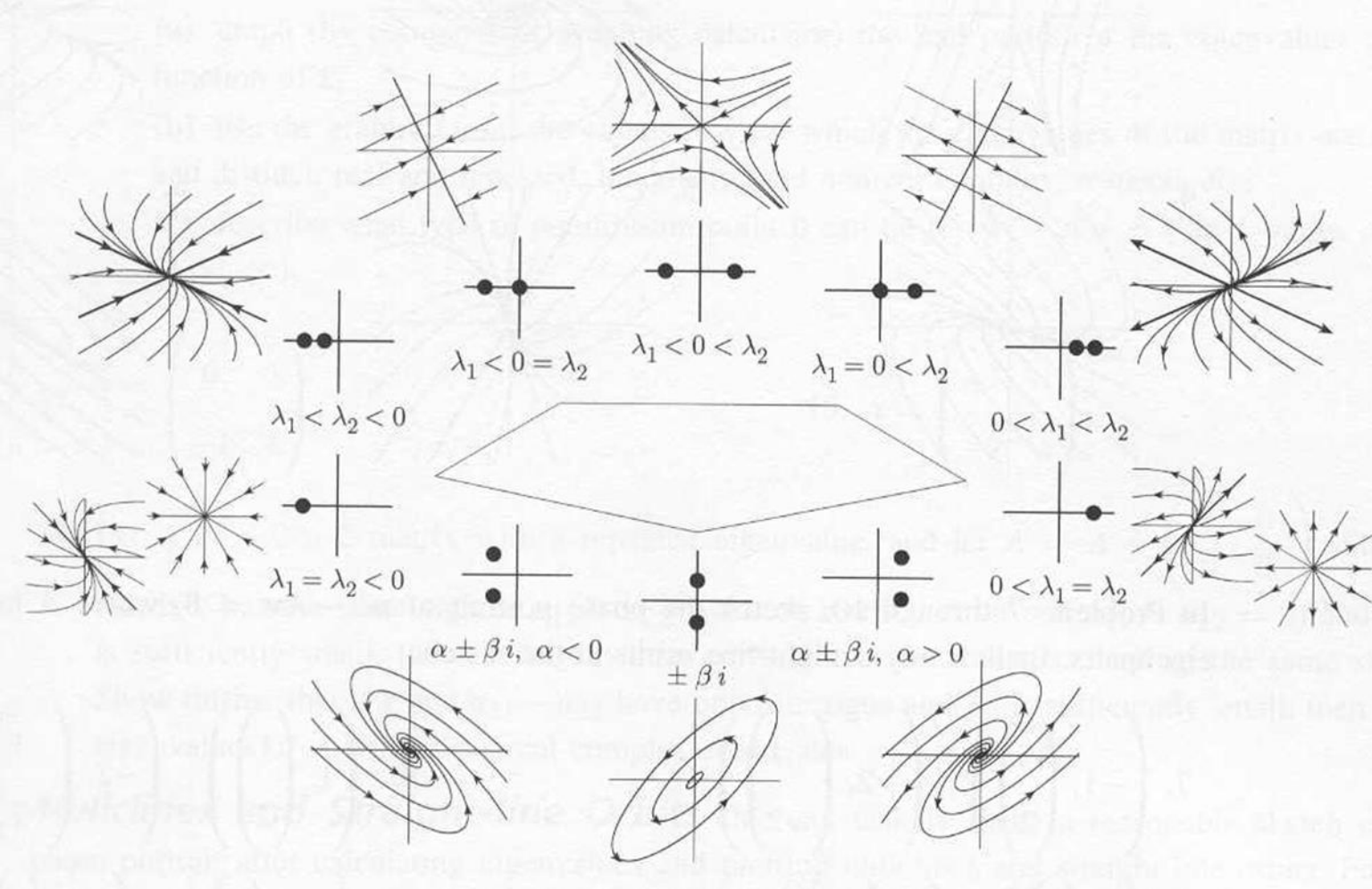
1. מהי נקודת השבת של המערכת?
2. ציירו את הוקטורים העצמיים ואת הכיוון אליו פונים עליהם
3. ציירו את עקומי האפס של המערכת
4. ציירו תנועה במרחב הפאזה מנקודות התחלה שונות

העשרה



מרחב הערכים העצמיים

מרחב τ, Δ



שיעורי בית

שאלה 1

השתמשו בנוסחה שלמדנו בשביל לחשב את **סכום** הערכים העצמיים במטריצה 2×2 .

יש לבחור תשובה אחת:

Δ

2Δ

2τ

τ

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right) + \frac{1}{2} \left(\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right) = \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2} \tau = \tau$$

שאלה 2

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right)$$

מערכת ב

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tau = -3 - 1 = -4$$

$$\Delta = (-3) \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1} \right)$$

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{3}, \lambda_2 = -2 - \sqrt{3} \quad \text{יציבה}$$

מערכת א

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\tau = 1 - 5 = -4$$

$$\Delta = 1 \cdot (-5) - 1 \cdot 0 = -5$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-5)} \right)$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -5 \quad \text{לא יציבה}$$

קבעו את יציבות המערכות הבאות:

מערכת א:

$$\dot{x}_1 = 1x_1 + 1x_2$$

$$\dot{x}_2 = -5x_2$$

מערכת ב:

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 1x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 1x_2$$

יש לבחור תשובה אחת:

שתי המערכות לא יציבות

מערכת א לא יציבה; מערכת ב יציבה

מערכת א יציבה; מערכת ב לא יציבה

שתי המערכות יציבות

שאלה 3

אילו זוגות ערכים עצמיים מבין הנ"ל מייצגים מערכת יציבה?

יש לבחור תשובה אחת או יותר:

יציבה (צומת)

$$\lambda_1 = -1 \quad \square$$

$$\lambda_2 = -5$$

לא יציבה (אוקף)

$$\lambda_1 = -1 \quad \square$$

$$\lambda_2 = 5$$

לא יציבה (צומת)

$$\lambda_1 = 1 \quad \square$$

$$\lambda_2 = 5$$

יציבה (צומת)

$$\lambda_1 = -5 \quad \square$$

$$\lambda_2 = -5$$

לא יציבה (אוקף)

$$\lambda_1 = 5 \quad \square$$

$$\lambda_2 = -5$$

שאלה 4

מבין הזוגות המייצגים מערכת יציבה, איזה זוג מייצג את המערכת שדועכת הכי מהר לנקודת השבת?

יש לבחור תשובה אחת:

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = -5$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 5$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 5$

$\lambda_1 = -5$

$\lambda_2 = -5$

$\lambda_1 = 5$

$\lambda_2 = -5$

שאלה 5

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + (-6) \cdot 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2$$

נתונה המערכת הבאה:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \underline{x}$$

כמו כן ידוע כי $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הם וקטורים עצמיים של המטריצה.

שלושת הסעיפים הבאים נוגעים למערכת זו.

הערך העצמי המתאים לווקטור העצמי $(1,1)$ הוא:

תשובה:

שאלה 6

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + (-6) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 10 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -10$$

נתונה המערכת הבאה:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \underline{x}$$

כמו כן ידוע כי $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הם וקטורים עצמיים של המטריצה.

שלושת הסעיפים הבאים נוגעים למערכת זו.

הערך העצמי המתאים לווקטור העצמי $(1, -1)$ הוא:

תשובה:

שאלה 7

נתונה המערכת הבאה:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \underline{x}$$

כמו כן ידוע כי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ הם וקטורים עצמיים של המטריצה.

שלושת הסעיפים הבאים נוגעים למערכת זו.

מהי נקודת השבת של המערכת?

יש לבחור תשובה אחת:

הכניסה למערכת היא אפס

בראשית הצירים

(1,1)

(-1,1)

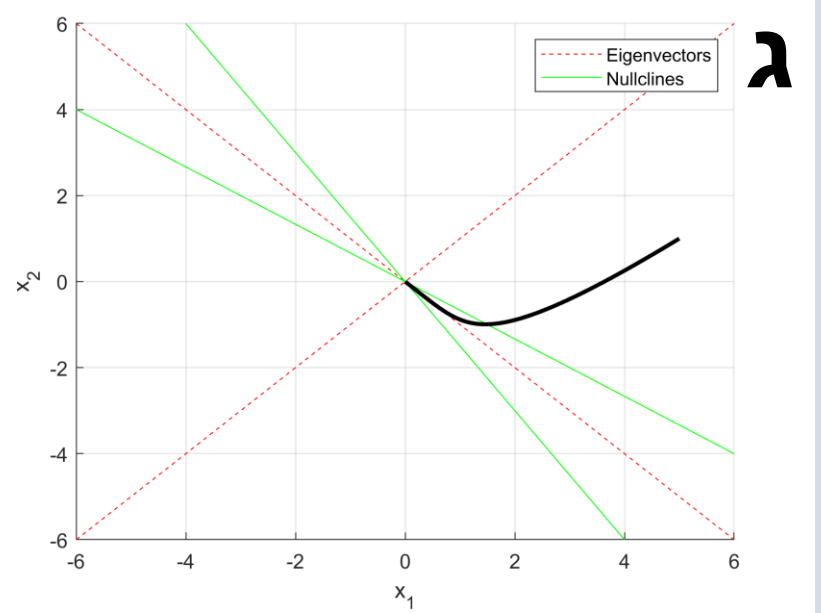
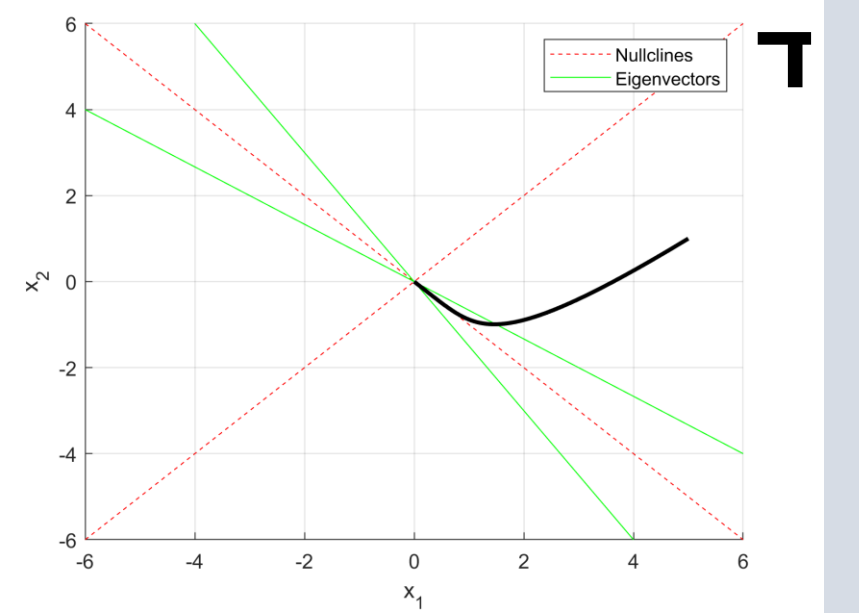
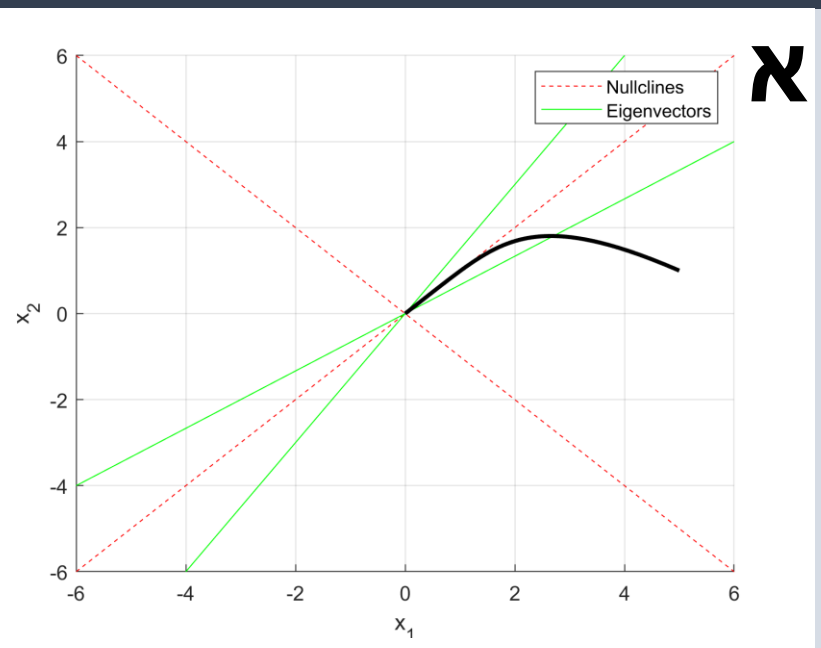
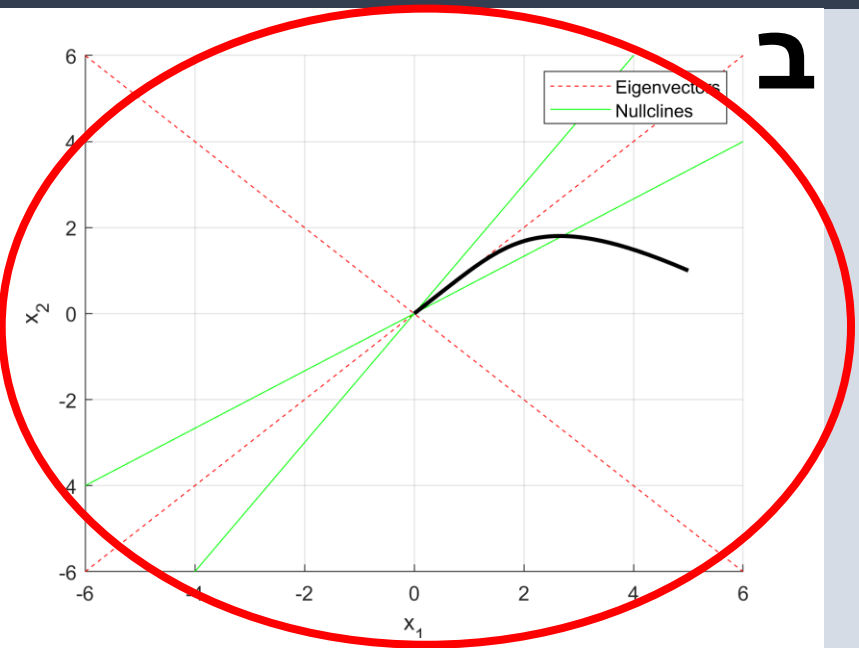
(-1,-1)

באינסוף

אין נקודת שבת

אי אפשר לדעת

שאלה 8



$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

מהיר

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

איטי

$$\dot{X}_1 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{3}{2}x_1$$

$$\dot{X}_2 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{2}{3}x_1$$

1. להציב את נקודת ההתחלה ולבדוק את כיוון הנגזרות ומתי יש חציה של עקום אפס
2. להבין איזה כיוון דועך מהר יותר

שאלה 9

נתונה מערכת דינמית דו מימדית

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x$$

כמו כן, ידוע כי $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה.

איזה מהאיורים הבאים של מסלולים במרחב הפאזה מתאר את המערכת?
(למען הסר ספק, ג – מתבדר, ד – מתכנס)

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 4$$

