תהודה, חד-מימד לא לינארי

תרגיל כיתה 5

יוחאי צור

מה היה לנו עד עכשיו?

סדר	מימדים (מספר משתנים)	ליניארי	לא ליניארי
ראשון ($\dot{x}$)	מימד אחד	$\dot{x} = -qx + u$ $x(t) = x(0) \cdot e^{-qt} + \frac{u}{q}(1 - e^{-qt})$ נעזרים בקונבולוציה בקלטים מסובכים	**היום!**
	שני מימדים	$\dot{x} = A \cdot x$ $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$	
שני ($\ddot{x}$)	מימד אחד	**היום! (קצת)**	

בקצרה...משוואות מסדר שני

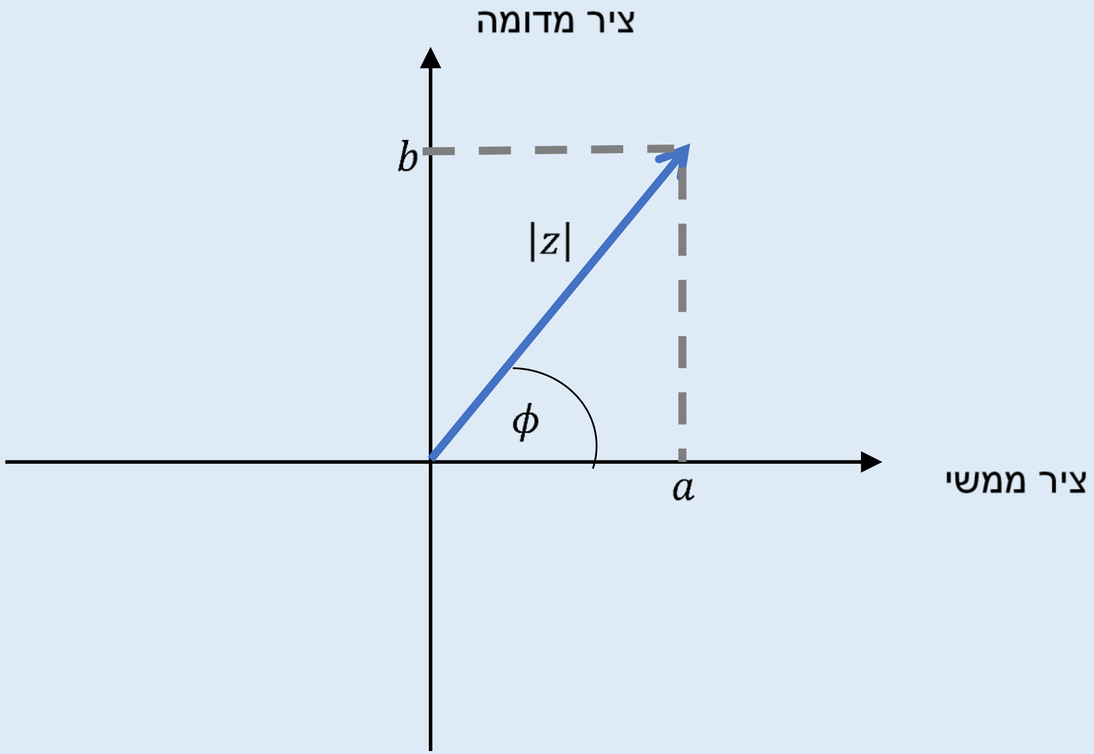
למערכות להן יש ע"ע מרוכבים יש **תדירות עצמית** שמאפיינת אותו. התדירות הזו <u>שונה</u> מהתדירות של הקלט.

f $\qquad$ $\lambda = \alpha \pm i\omega$

<u>ההבדל בין תדירות זוויתית לתדירות</u>

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega\left[\frac{radians}{second}\right] \leftrightarrow f\left[\frac{1}{second}\right] = Hz$$



- זמן מחזור: $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- פתרון משוואת אויילר:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$$

$$z = a + ib = |z| \cdot e^{i\phi}$$

תהודה

אם הקלט מחזורי הוא דוחף את המערכת בצורה היעילה ביותר כאשר ה**תדר של הקלט** קרוב ל**תדירות העצמית של המערכת**.

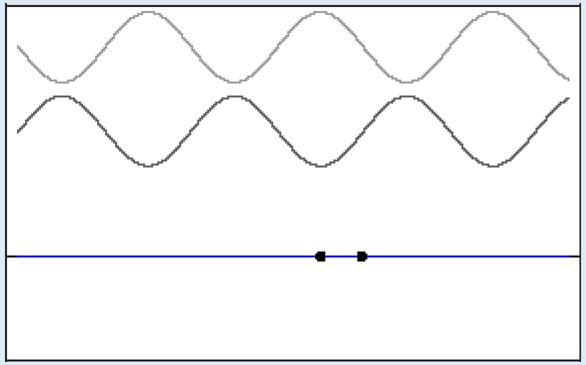
תהודה – כאשר הקלט פועל בתדירות קרובה לתדירות הטבעית של המערכת

כאשר ישנה תהודה מגיעים למקסימום ההשפעה של הגלים.

x

u

$f(x) = x + u$



לדוגמא: MRI, אולטרסאונד לפירוק אבני כליה, וכו'...

איך פותרים משוואות חד מימדיות מסדר שני?

הופכים אותן למשוואות דו מימדיות מסדר ראשון!

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 9x = 0$$

$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = -8$$

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ -9x + 4\dot{x} \end{pmatrix}}_{\text{Az}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}}_{\text{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}}_{\text{z}} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \tau = \\ \Delta = \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{\quad}}{2}$$

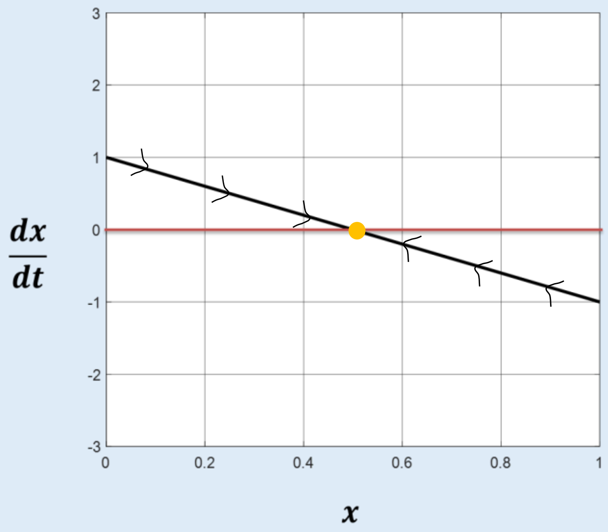
למערכת כזו ניתן גם להוסיף קלט.

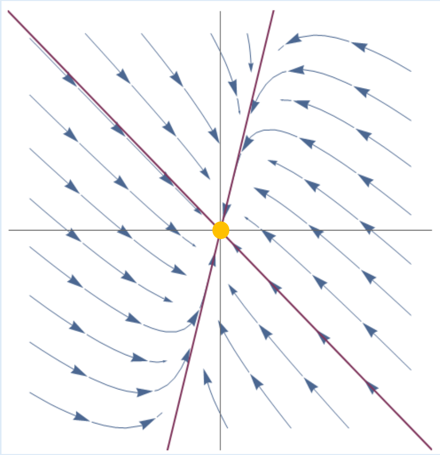
הבדלים בין מערכת לינארית ללא לינארית

תזכורת: מערכת לינארית היא מערכת שמקיימת $f(ax + y) = af(x) + f(y)$

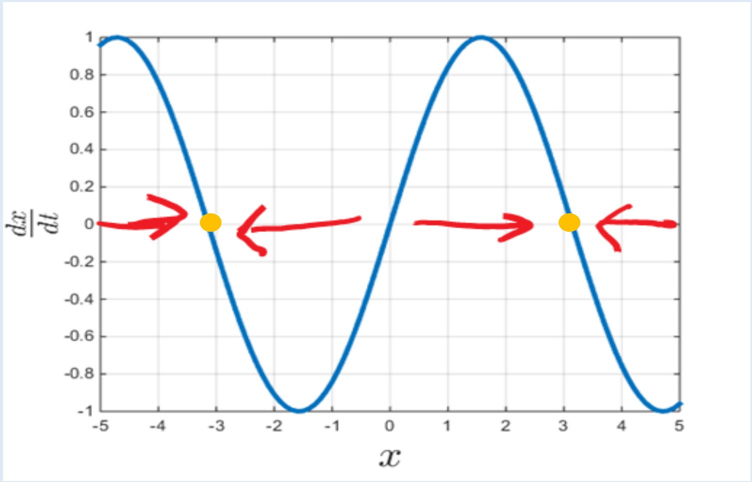
1. במערכת לא לינארית יכולות להיות מספר נקודות שבת
2. במערכת ליניארית, ההתנהגות **אחידה בכל המרחב** (מבחינה איכותית), והיא נקבעת בכל נקודה לפי המיקום שלה ביחס לנקודת השבת (ואופי נקודת השבת).
   במערכת לא ליניארית ההתנהגות שונה איכותית באזורים שונים

<u>מערכות ליניאריות</u>



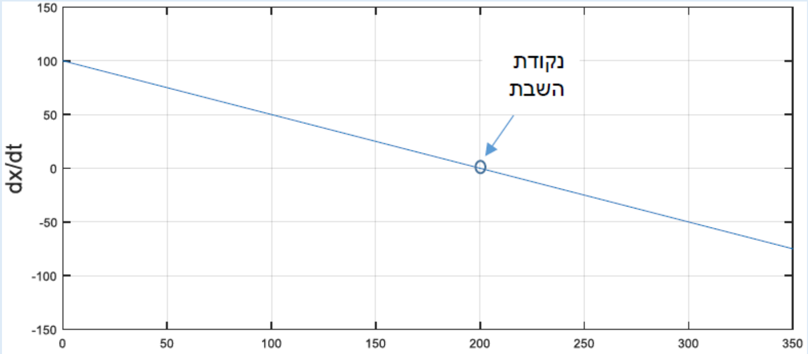


<u>מערכות לא ליניאריות</u>



במערכות לינאריות בחד מימד....

פתרון גרפי



פתרון נומרי

t	$x(t)$	$\frac{dx}{dt}$	$\Delta t \cdot \frac{dx}{dt}$
0	0	100	0.1·100 = 10
0.1	0+10 = 10	100-0.5·10 = 95	9.5
0.2	10+9.5 = 19.5		

פתרון אנליטי

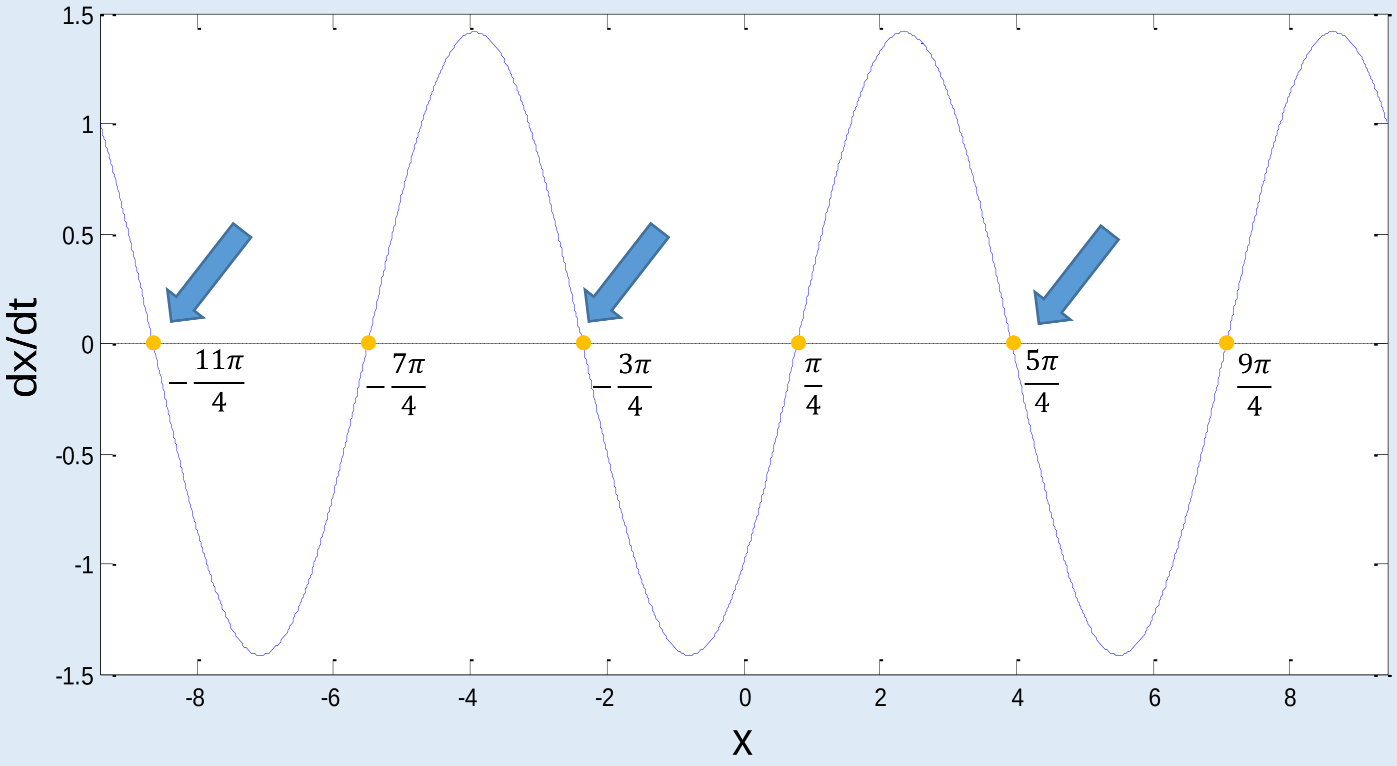
$$x(t) = x(0) \cdot e^{-qt} + \frac{u}{q}(1 - e^{-qt})$$

וגם במערכות לא ליניאריות

גרפי | נומרי | אנליטי

נתונה המערכת $\frac{dx}{dt} = \sin(x) - \cos(x)$

מי הן נקודות השבת בתחום $[-3\pi, 3\pi]$ ומהי יציבותן?



יציבות

וגם במערכות לא לינאריות

גרפי | **נומרי** | **אנליטי**

$-\frac{11\pi}{4}$

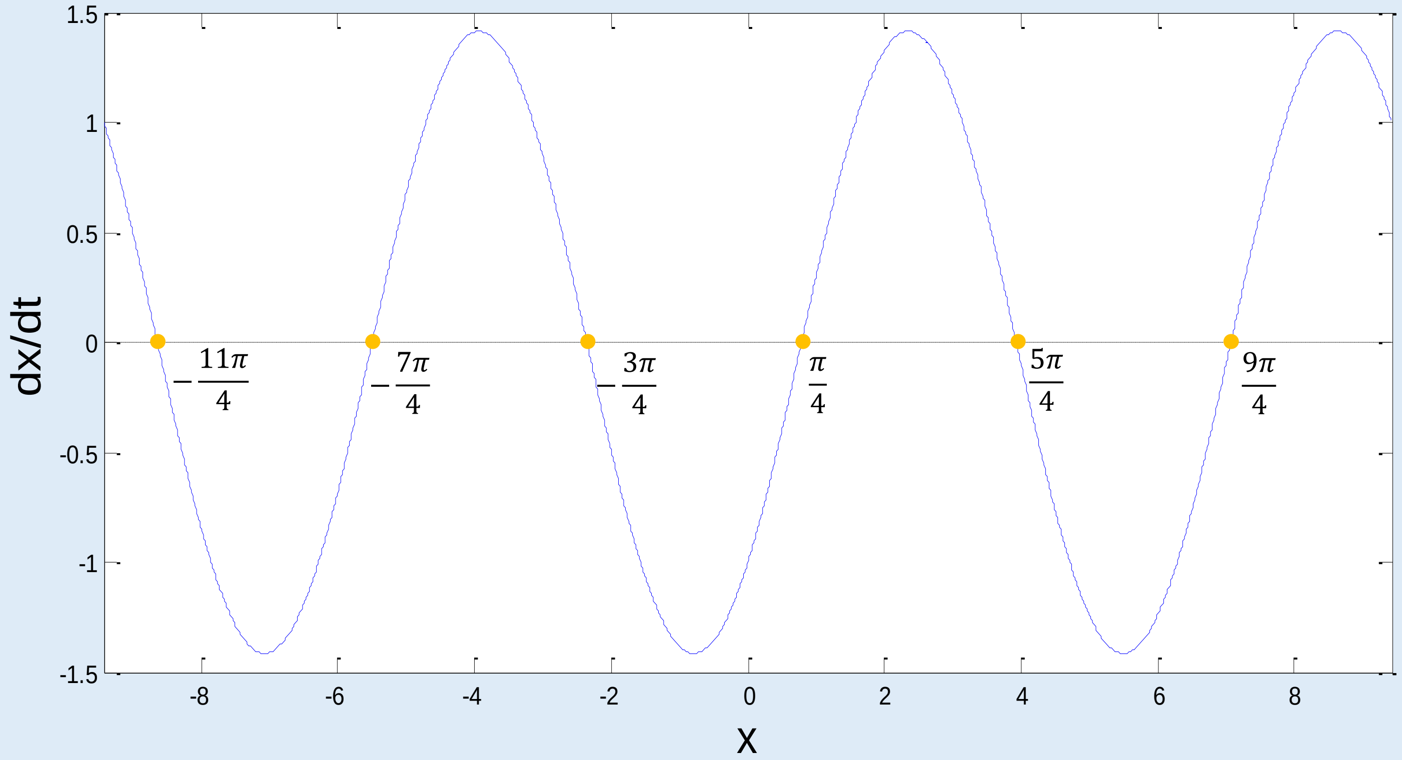
$-\frac{3\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4}$

נתונה המערכת $\frac{dx}{dt} = \sin(x) - \cos(x)$

עבור תנאי ההתחלה הנ"ל, על איזה ערך תתייצב המערכת?

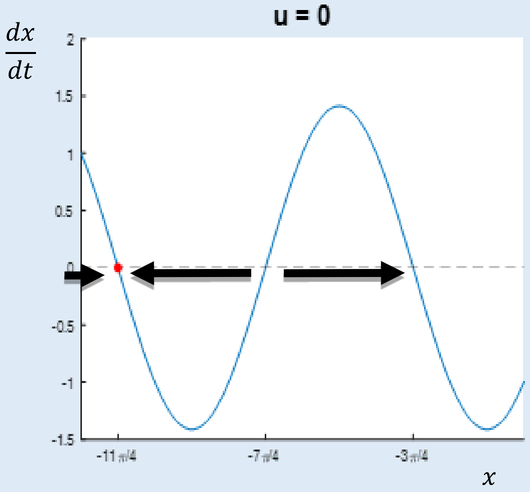
1. $x(0) = -\frac{9\pi}{4}$
2. $x(0) = 0$
3. $x(0) = \frac{\pi}{2}$



קלטים שונים משפיעים שונה

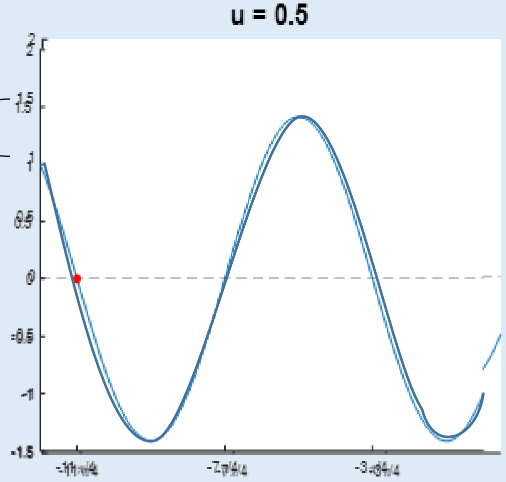
עבור $u(t = 5) = 0.5$

$x(0) = -\frac{9\pi}{4}$



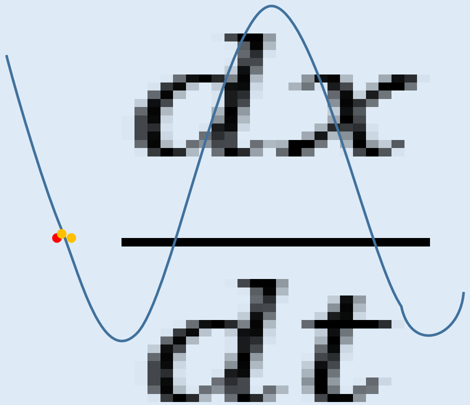
רגע **לפני** תחילת הפולס

המערכת גדלה ב-0.5

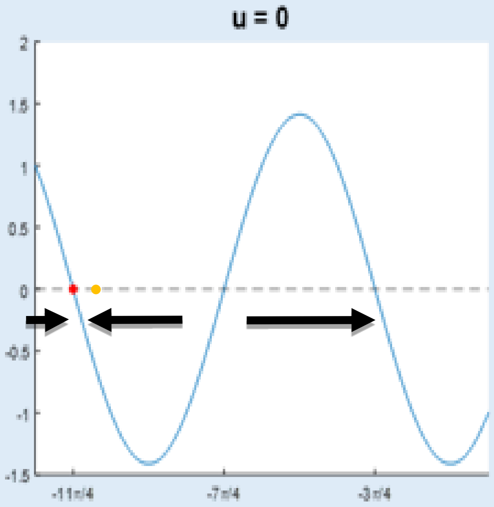


רגע **אחרי** תחילת הפולס

נק' השבת • כמעט לא זזה



רגע **אחרי** סוף הפולס



המצב הסופי של המערכת

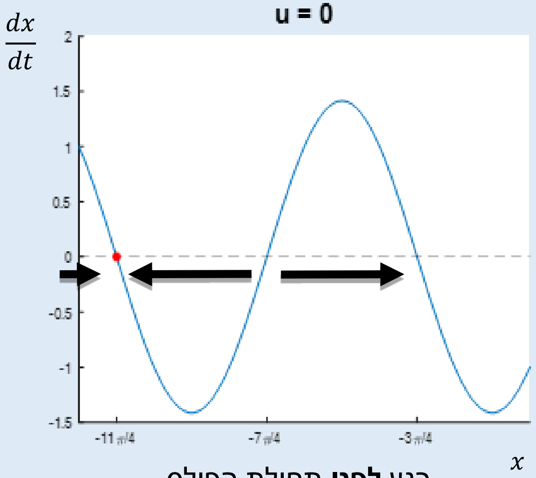
המערכת חזרה למצבה המקורי

קלטים שונים משפיעים שונה

עבור $u(t=5)=3$

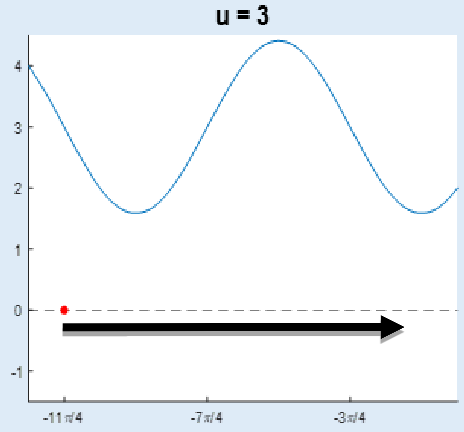
$x(0)=-\frac{9\pi}{4}$

אין נקודות שבת
X הולך ועולה

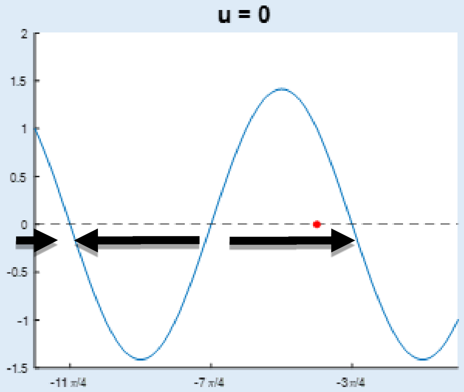


רגע **לפני** תחילת הפולס

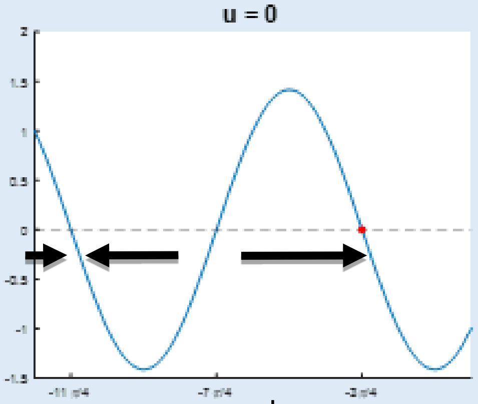
המערכת
גדלה ב-3



רגע **אחרי** תחילת הפולס



רגע **אחרי** סוף הפולס



המצב הסופי של המערכת

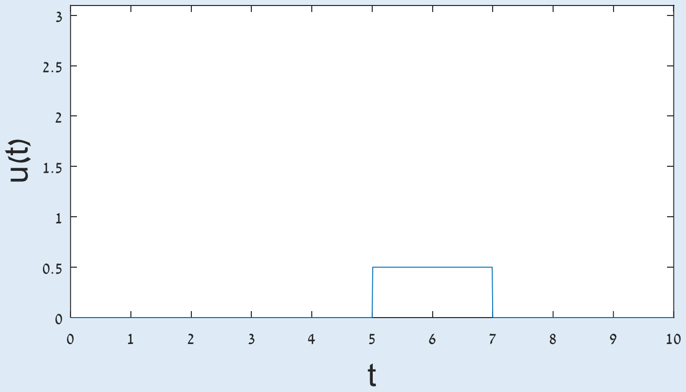
אגן ההתכנסות נוצר מחדש
ולכן נקודת השבת השתנתה

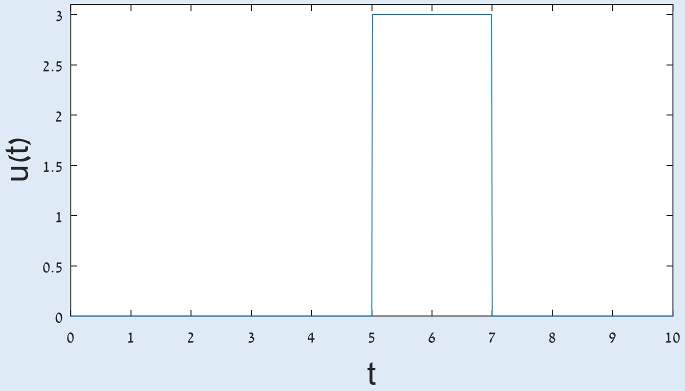
קלטים שונים משפיעים שונה

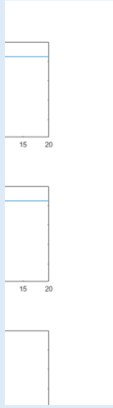
גרפי | **נומרי** | **אנליטי**

איך המערכת תגיב לקלטים הבאים?

1. $x(0) = -\frac{9\pi}{4}$
2. $x(0) = 0$
3. $x(0) = \frac{\pi}{2}$



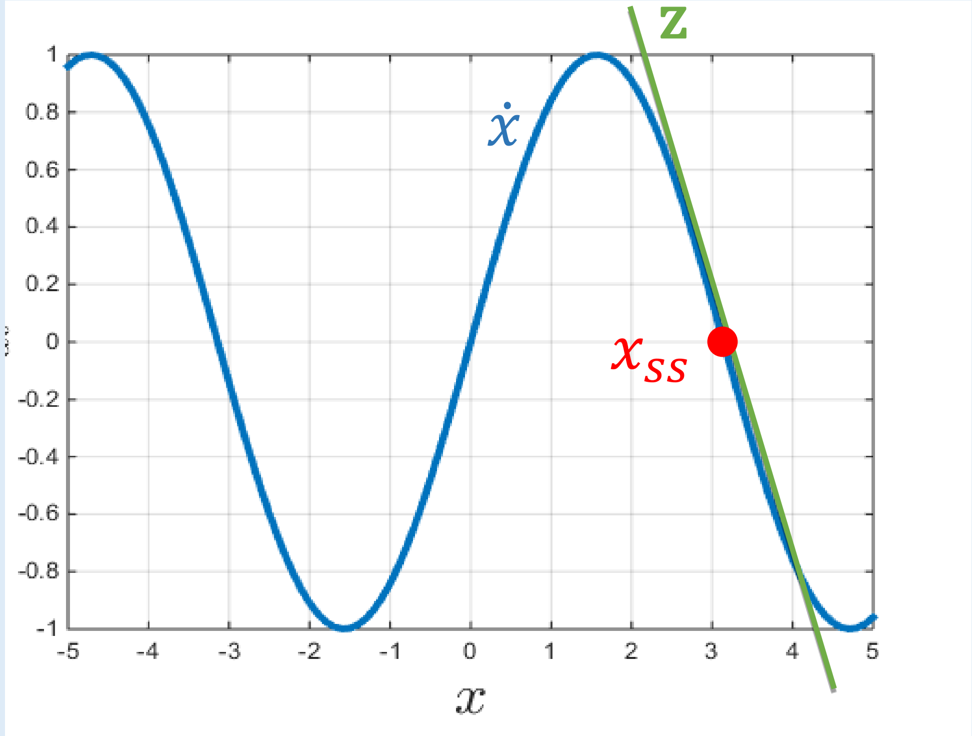




סדר פעולות בפתרון שכולל לינאריזציה

נשתמש בלינאריזציה כדי למצוא פתרון כמותי מקורב $(x(t))$ של המערכת. הקירוב הוא לינארי בסביבת נקודת השבת.

כדי לפשט נקרא ל-$\dot{x}$ כ-$f(x)$. על מנת למצוא פתרון מקורב בנקודה קרובה לנקודת השבת:
יצירת עקום משיק בנקודת השבת ← מציאת שיפוע העקום ← נמצא את הפתרון של $x(t)$ בעזרת העקום



1. נסמן עקום z שמשיק ל-$\dot{x}$ בנקודת השבת: $z = a(x - x_{ss})$ (**משוואה 1**)
2. אם נגזור את z נקבל ביטוי מהצורה $\dot{z} = a \cdot z$ כאשר a הוא שיפוע נגזרת הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_{ss}. זהו פיתוח של טור טיילור שאתם <u>לא צריכים לדעת איך לעשות.</u>
3. כדי למצוא את השיפוע a נגזור את הפונקציה הנתונה לנו $f(x)$ לפי x בנקודה x_{ss} - כלומר $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_{ss}}$
4. קיבלנו משוואה מהצורה $\dot{z} = -az$ ופתרונה הוא כמו שלמדנו: $z(t) = z(0) \cdot e^{-at}$ (**משוואה 2**).
5. נשתמש במשוואות 1 ו-2 (שתיהן $z(t)$) ובתנאי ההתחלה על מנת למצוא את מה שאנחנו צריכים.

מה עושים כשאי אפשר לעשות לינאריזציה?

מתי אי אפשר לעשות לינאריזציה?

1. כאשר אין נקודות שבת
2. כאשר נקודת השבת רחוקה מהנקודה אותה אנו מחפשים

אז מה עושים?

- קירוב על ידי פתרון נומרי

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x(t)} \cdot \Delta t$$

t	$\mathbf{x}(\mathbf{t})$	$\frac{dx}{dt}$	$\Delta t \cdot \frac{dx}{dt}$
0	0	100	0.1·100 = 10
0.1	0+10 = 10	100-0.5·10 = 95	9.5
0.2	10+9.5 = 19.5		

- מנסים לראות האם יש רמזים בשאלה שיעזרו לנו לפתור בדרך אחרת

שאלה 1

נתונה המערכת הבאה:

$$\ddot{x}=-6\dot{x}-10x$$

$$x(0)=0$$

$$\dot{x}(0)=\frac{\sqrt{8}}{14}$$

באיזה מרגעי הזמן הבאים יתקיים $x(t)=0$?

יש לבחור תשובה אחת:

- ○ 1
- ○ $\frac{\sqrt{8}}{14}\pi$
- ○ $\frac{\sqrt{8}}{14}$
- ○ π
- ○ $\frac{10}{\pi}$

שאלה 1 - פתרון

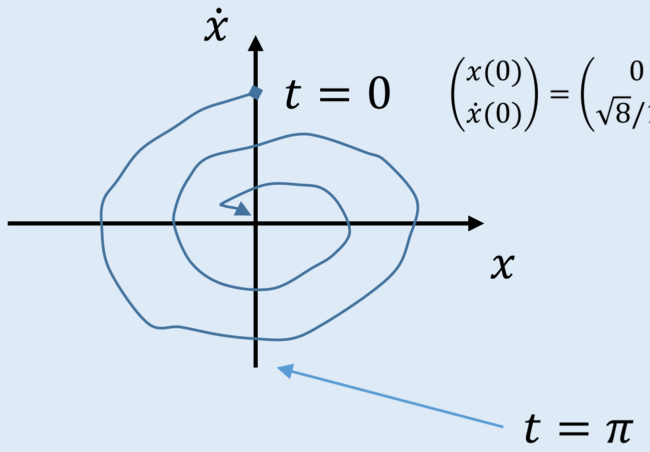
נעבור לדו מימד מסדר ראשון

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -10x - 6\dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

נחשב ע"ע

$$\begin{matrix} \tau = -6 \\ \Delta = 10 \end{matrix} \qquad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 * (10)}}{2} = -3 \pm i$$

ספירלה בתדירות זוויתית 1



$$\begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{8}/14 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

אתם חוקרים במעבדה שעובדת על טיפול חדשני בקצב לב איטי (bradycardia) על ידי גירוי חשמלי.

הנכם עובדים על תרבית תאי לב של לויתן שקצב ההתכווצות מתואר בה על ידי המשוואה הבאה:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -1444x$$

(x מתאר את אורך שריר הלב במהלך ההתכווציות)

על מנת להיות מסוגלים להבין את הדינמיקה של התאים יש לעבור למערכת משוואות מסדר ראשון.

מהי המטריצה [a1 a2; a3 a4] המתארת את המערכת מסדר ראשון?

יש לבחור תשובה אחת:

1. [0 1 ;-1444 0]
2. [0 1 ;1444 0]
3. [0 1 ; 0 -1444]
4. [1 0 ;-1444 0]
5. לא ניתן להמיר משוואה זו למערכת משוואות מסדר ראשון

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -1444x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1444 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

שאלה 3

קולגה מהמעבדה ביקש מכם עזרה. כל פעם שהוא היה מגרה את תאי הלב בתדר מסויים, קצב הלב היה עולה כל כך שלבסוף התאים היו מפסיקים לעבוד ומתים. לאחר ששאלתם מה היה תדר הגירוי הבנתם מיד את הבעיה.

מה הוא תדר הגירוי שבו השתמש הקולגה?

(ביחידות של הרץ-נא לעגל כלפי מטה)

A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1444 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} \tau = 0 \\ \Delta = 1444 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-4 * 1444}}{2} = \pm 38i$$

$$\lambda = \alpha \pm i\omega$$

$$\omega = 38 = 2\pi f$$

$$f = \frac{38}{2\pi} = 6.04$$

<u>ההבדל בין תדירות זוויתית לתדירות</u>

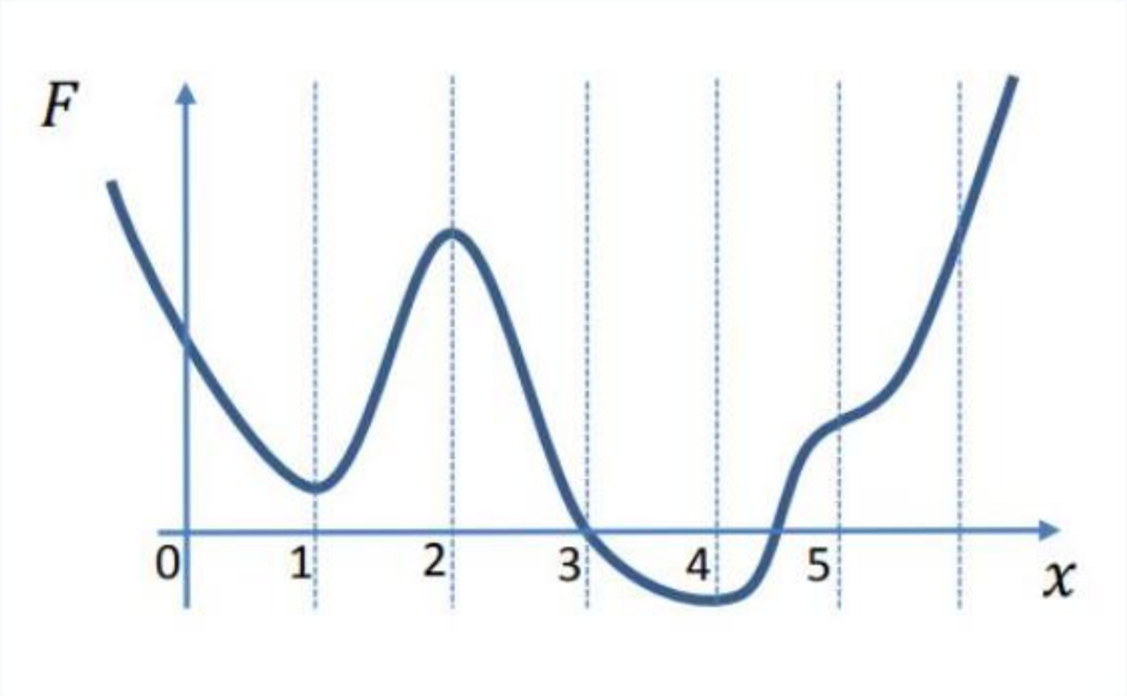
$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega \left[\frac{radians}{second}\right] \leftrightarrow f\left[\frac{1}{second}\right] = Hz$$

שאלה 4

נתונה משוואה דפרנציאלית לא לניארית מהצורה:

$$\dot{x}=F(x)$$



מצא את x כעבור הרבה זמן כאשר תנאי ההתחלה x(0)=0.

יש לבחור תשובה אחת:

- 1
- 2
- 3
- 4
- אינסוף

נקודות שבת ב-3 וב-4.5

ב-3 הנקודה יציבה: מכל x(0)<4.5 נגיע אליה – אגן ניקוז

שיעורי בית – שאלה 5

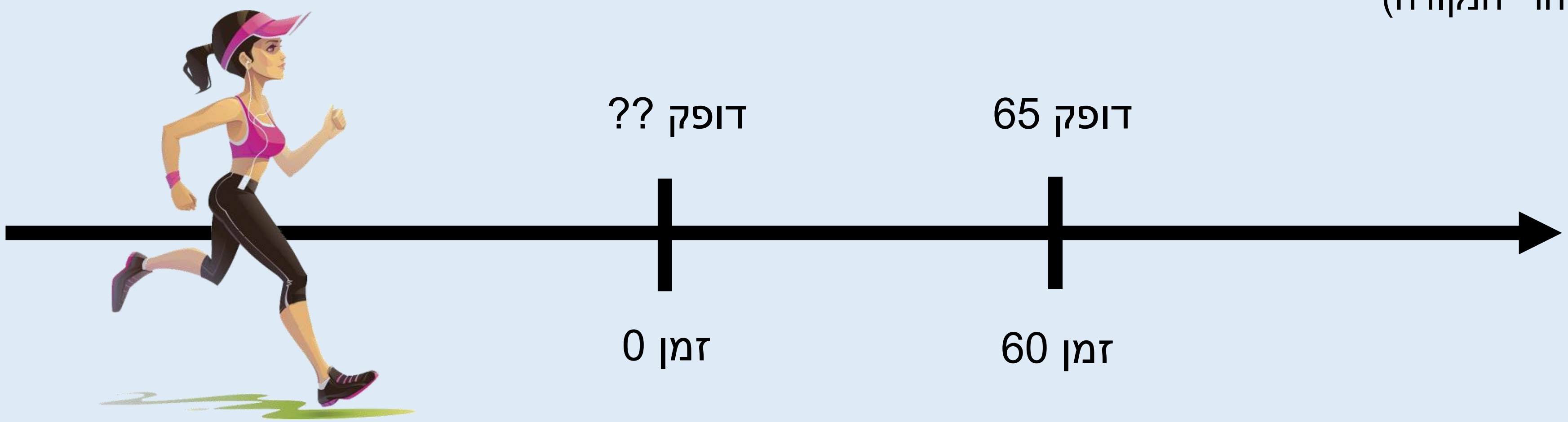
ידוע שדופק (x) אצל אדם בוגר במנוחה נשלט ע"י משוואה דפרנציאלית:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \left(\frac{x}{60}\right)^3$$

(הזמן נמדד בשניות, ואילו הדופק נמדד בפעימות לדקה).

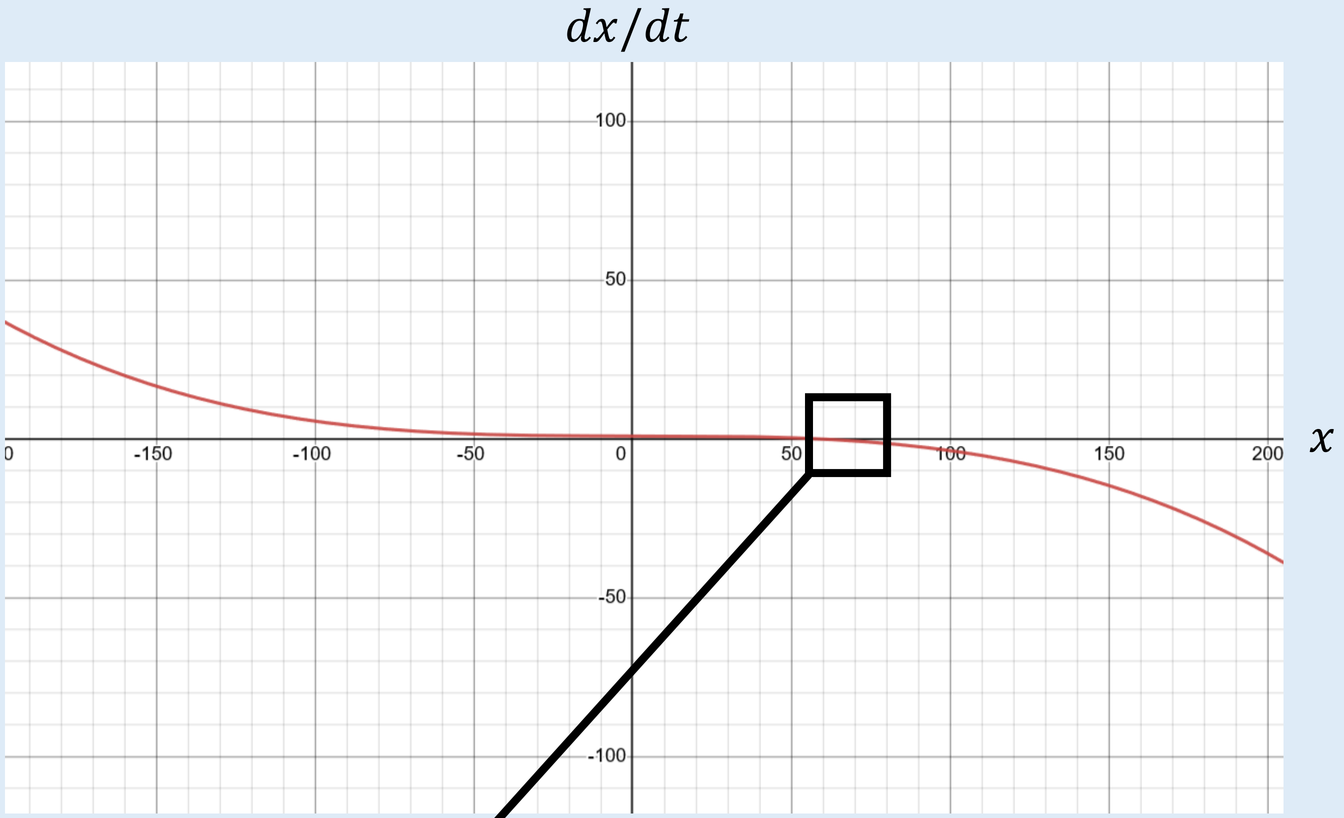
נבדקת מבצעת תרגילי כושר כאלה ואחרים שבמהלכם הדופק שלה עולה. לאחר מכן היא ממתינה 60 שניות במצב מנוחה ואז מודדים לה את הדופק. תוצאת המדידה היא 65 פעימות לדקה.

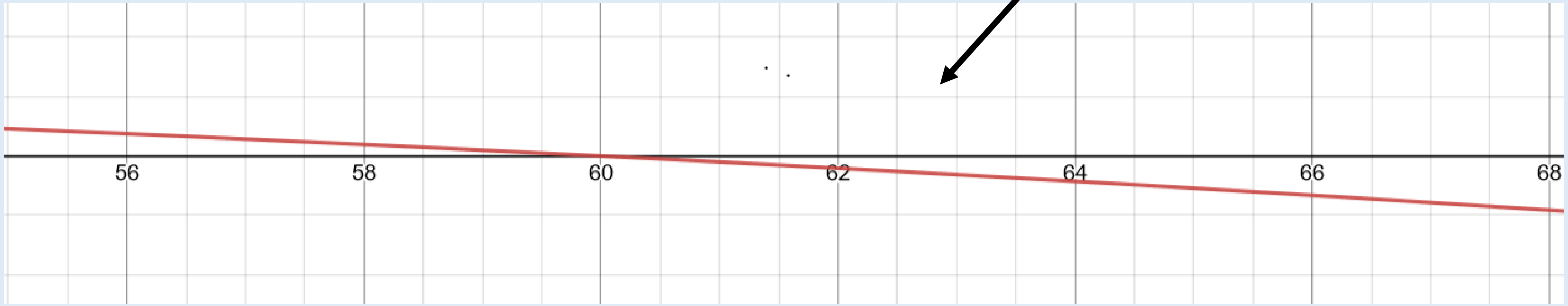
השתמשו בקירוב לניארי סביב נקודת שיווי משקל של המערכת, והעריכו את הדופק של הנבדקת מיד בתום תרגילי הכושר. (נא לדייק עד ספרה אחת אחרי הנקודה)



קירוב לינארי בסביבת נקודת השבת

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \left(\frac{x}{60}\right)^3$$





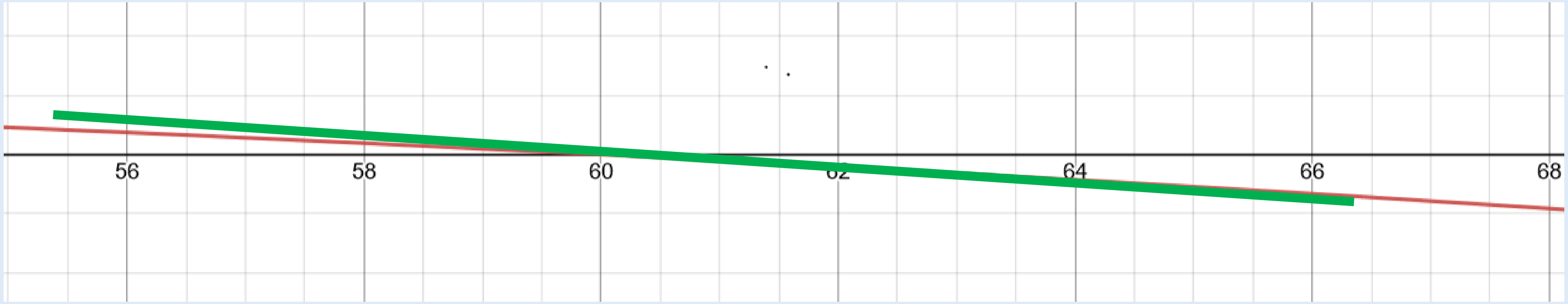
יצירת עקום משיק בנקודת השבת ←

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x}{60}\right)^3$$

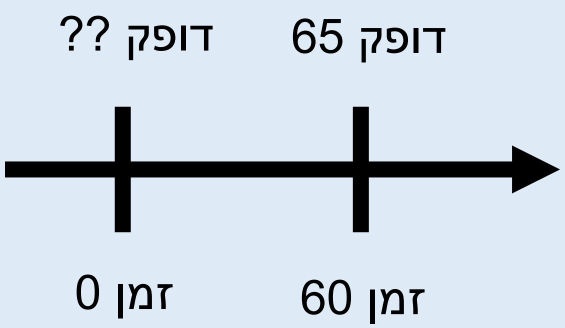
$$f'(x) = -3\left(\frac{x}{60}\right)^2 \cdot \frac{1}{60}$$

$$f'(60) = -\frac{3}{60}$$

מציאת שיפוע העקום ←



← נמצא את הפתרון של $x(t)$ בעזרת העקום



$$z(t) = x(t) - 60$$

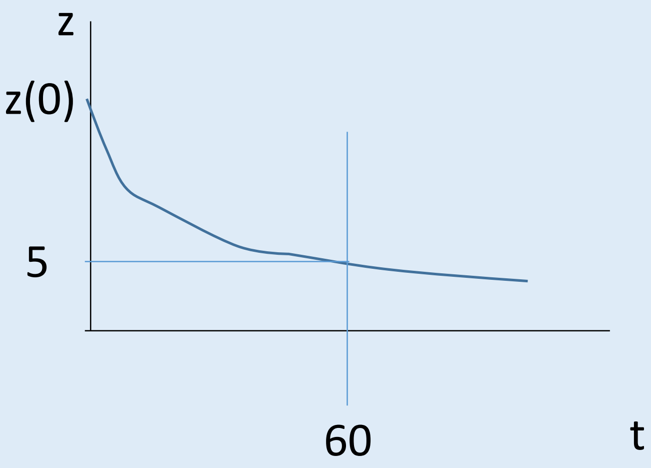
$$\frac{dz}{dt} = f'(60)z = -\frac{3}{60}z$$

$$z(t) = z(0)e^{-\frac{3t}{60}}$$

$$z(60) = z(0)e^{-\frac{3\cdot 60}{60}} = 5$$

$$z(0) = \frac{5}{e^{-3}} = 100.42$$

$$x(0) = z(0) + 60 = 160.42$$



שאלה 6

כמובן, הקירוב הלניארי אינו מושלם.

נתבונן בשני תסריטים של התכנסות המערכת למצב שיווי המשקל.

1. הדופק ההתחלתי הוא 65 פעימות בדקה.

2. הדופק ההתחלתי הוא 55 פעימות לדקה.

באיזה מהתסריטים ההתכנסות לנקודת שווי משקל תהיה **איטית** יותר מהמנובא ע"י הקירוב הלניארי?

(מומלץ מאד לצייר את הגרף של dx/dt כתלות ב-x ושל הקירוב הלניארי שלו על אותה מערכת צירים)

בדופק התחלתי של 55:

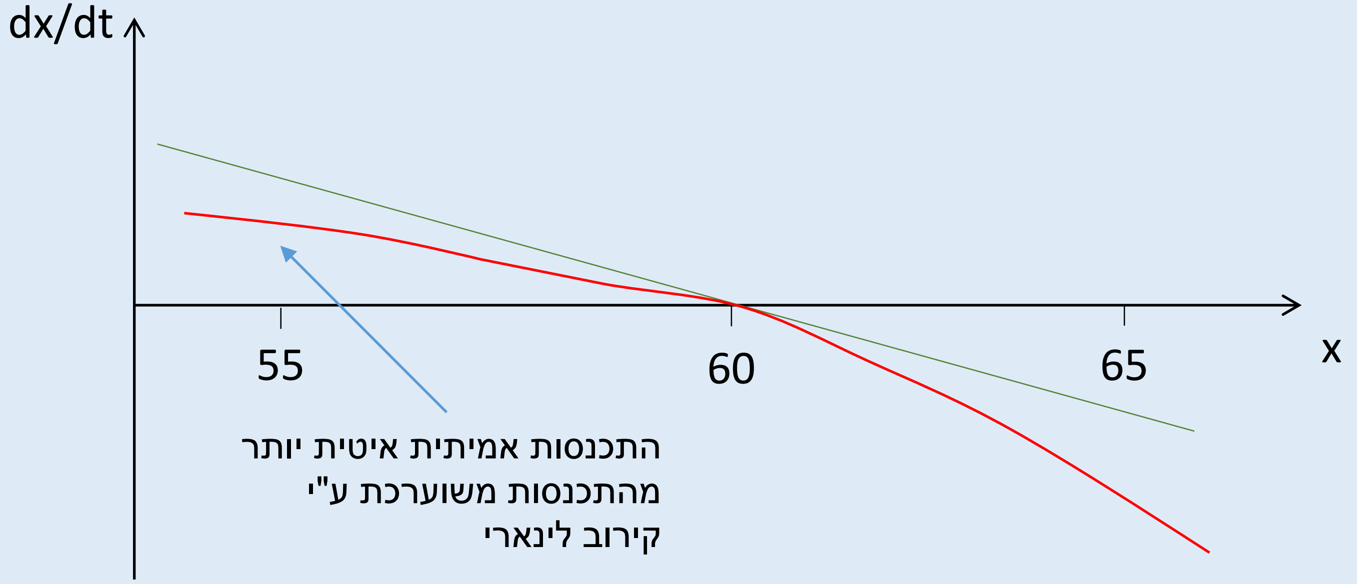
$$f(55) = 1 - \left(\frac{55}{60}\right)^3 = 0.229$$

$$\widetilde{f(55)} = \frac{3}{60} \cdot 5 = 0.25$$

בדופק התחלתי של 65:

$$f(65) = 1 - \left(\frac{65}{60}\right)^3 = -0.271$$

$$\widetilde{f(65)} = -\frac{3}{60} \cdot 5 = -0.25$$

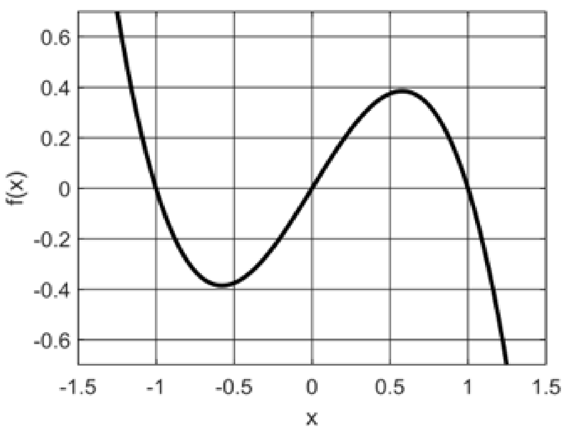


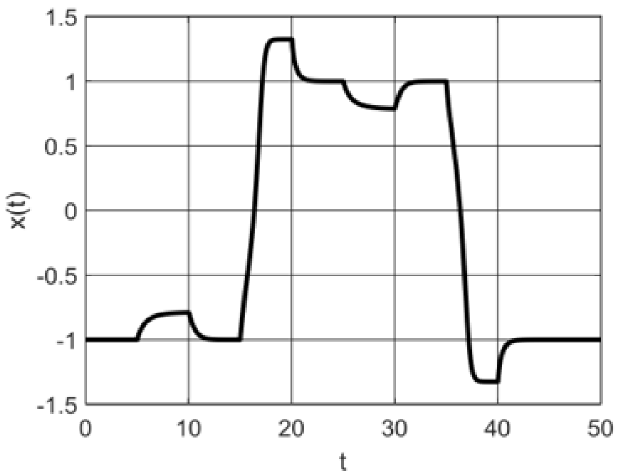
שאלה 8

נתונה המערכת הבאה:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + u(t)$$

כאשר f(x) ו x(t) נתונים בגרפים הבאים:

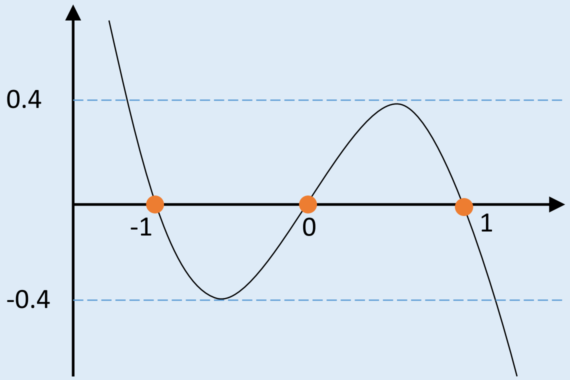




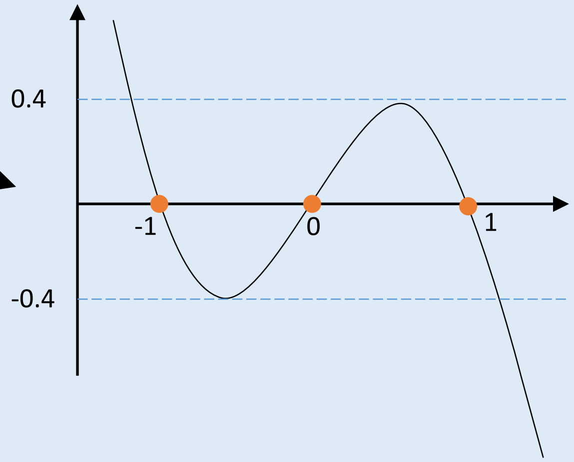
ציירו את $u(t)$. איזה משפט נכון?

יש לבחור תשובה אחת:

- הסימן של הפולס הראשון והשלישי חיובי.
- הפולס הראשון והשלישי יותר גדולים מ 0.4.
- הפולס הראשון והשלישי יותר קטנים בערך מוחלט מ 0.4.
- הסימן של הפולס הראשון והשלישי שלילי.



קלט שלילי גדול שמוציא מאגן הניקוז



קלט חיובי גדול שמוציא מאגן הניקוז