מה היה לנו עד עכשיו?

סדר	מימדים (מספר משתנים)	ליניארי	לא ליניארי
ראשון ($\dot{x}$)	אחד	$\dot{x} = -qx + u$ $x(t) = x(0) \cdot e^{-qt} + \frac{u}{q}(1 - e^{-qt})$ נעזרים בקונבולוציה בקלטים מסובכים	• מספר נקודות שבת • קלט יכול להוציא אותנו מאגני ניקוז • התנהגות שונה במיקומים שונים בדיאגרמת הפאזות • מציאת פתרון יכולה להעשות בעזרת ליניאריזציה או פתרון נומרי
	שניים	$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax + B$ $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ $\dot{x} = \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ $\lambda = \alpha \pm i\omega,\ T = \frac{2\pi}{\omega},$ $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$ נעזרנו בעקומי אפס ($\frac{dx}{dt} = 0$) ווקטורים עצמיים על מנת לצייר את המסלול	**היום!**

מערכות דו מימדיות לא לינאריות

במערכת דו-מימדית יש לנו שני משתנים (x_1,x_2 או x,y)

המערכות יהיו בד"כ מהצורה של נגזרת:

למשל $$f(x,y)=\begin{cases} f_1(x,y)=\frac{dx}{dt} \\ f_2(x,y)=\frac{dy}{dt}\end{cases}$$ או $$\begin{cases} f(x_1,x_2)=\frac{dx_1}{dt} \\ g(x_2,x_2)=\frac{dx_2}{dt}\end{cases}$$

מכיוון שאנו מתחילים במערכות לא לינאריות, נשתמש שוב ב**לינאריזציה**.

אבל איך עושים את זה במערכת דו-מימדית?

יעקוביאן

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{dx} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{dx} & \frac{\partial g}{dy}\end{pmatrix}$$

מערכות דו מימדיות לא לינאריות

דרכים לפתרון בעיות:

1. לינאריזציה סביב נקודות השבת (בשני מימדים) – נעשית בעזרת מציאת ה**יעקוביאן** וחישובו בנקודת השבת
2. עקומי אפס ווקטורים עצמיים
3. כיווני זרימה

דגשים:

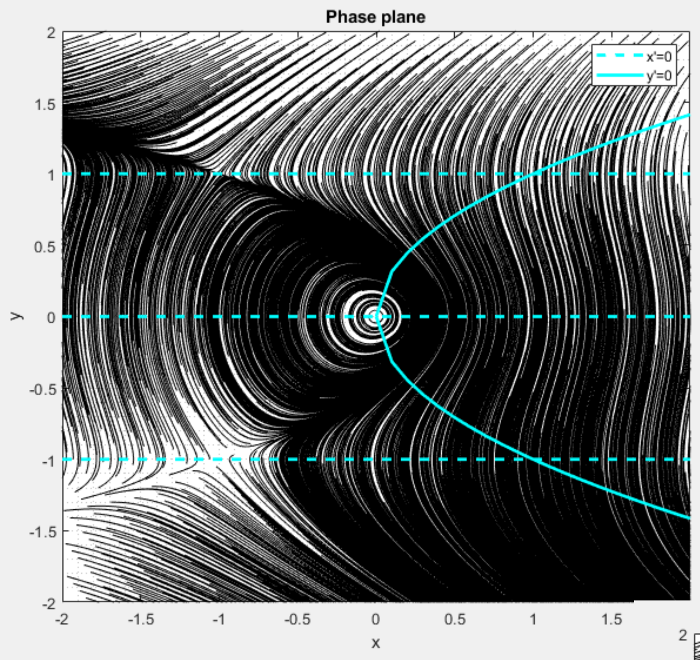
1. נקודות שבת נמצאות בנקודות המפגש של עקומי האפס – אבל לא תמיד זה מספיק להראות את זה גרפית – לפעמים צריך לפתור.
2. כל פעם שחוצים עקום אפס הכיוון מתהפך
3. על עקומי האפס החצייה היא רק בכיוון אחד (עבור $\dot{x}_1 = 0$ – למעלה ולמטה, עבור $\dot{x}_2 = 0$ – ימינה ושמאלה)
4. בנקודות השבת הכיוון מתהפך (למשל: אם באזור ליד נקודת השבת יש ירידה ימינה, אחריה תהיה עליה שמאלה)
5. הצבת נקודת שבת ביעקוביאן נותנת לנו את הערכים העצמיים בנקודה, ומכאן גם את יציבותה

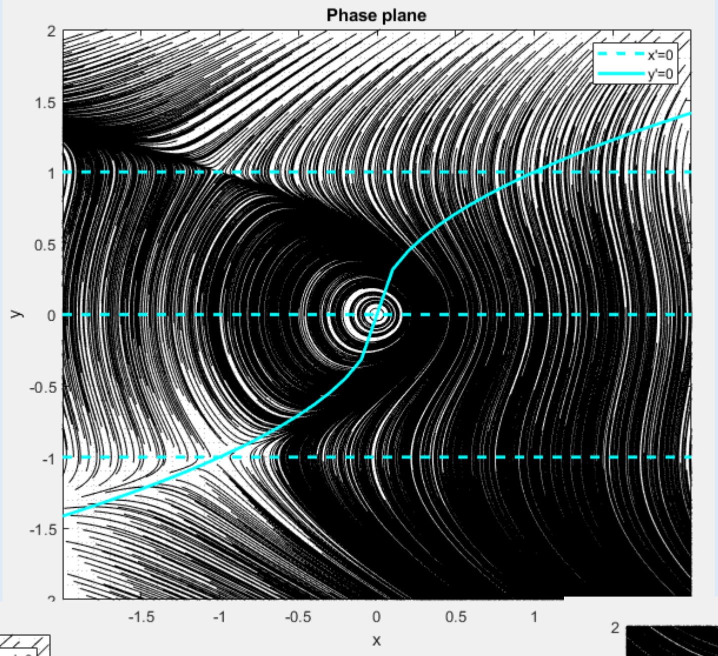
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{dx} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{dx} & \frac{\partial g}{dx} \end{pmatrix}$$

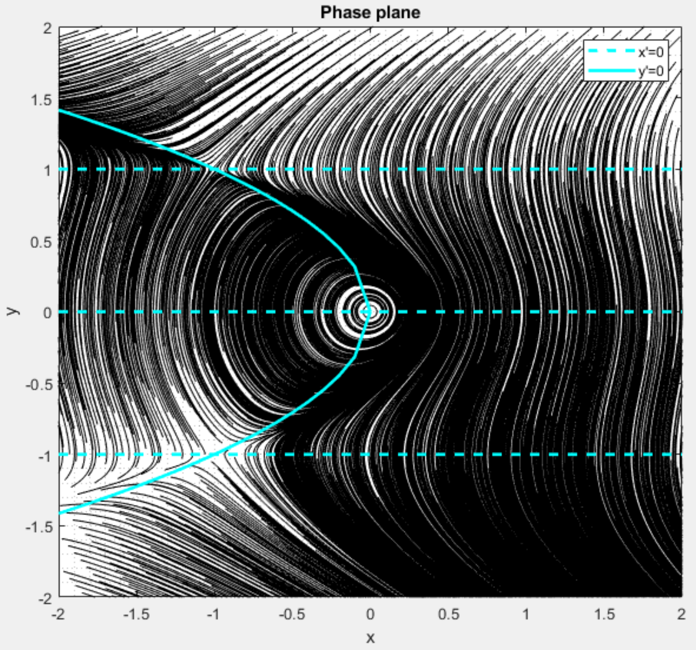
שאלה 1

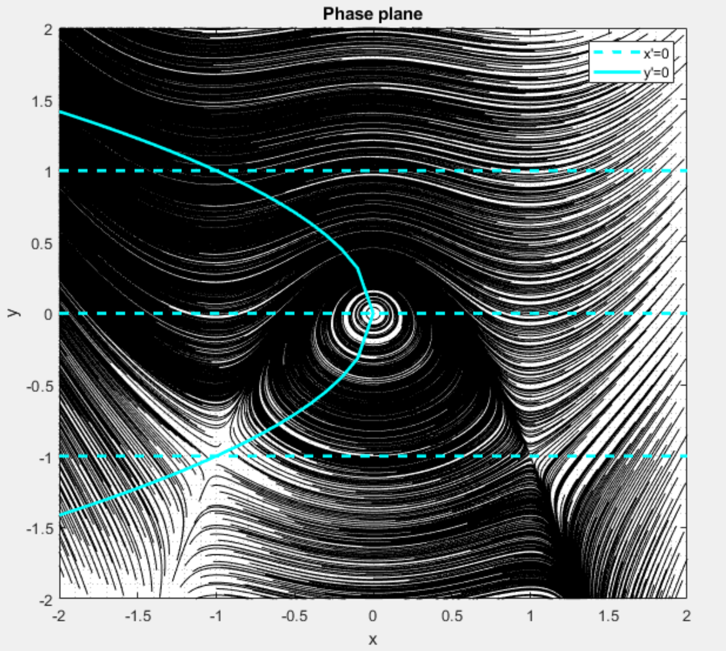
$$\dot{x} = y - y^3$$
$$\dot{y} = -x - y^2$$

לפי הנלמד בהרצאות,
איזה שרטוט במרחב
הפאזה מתאים לפתרון
המערכת (שימו לב לעקומי
האפס)









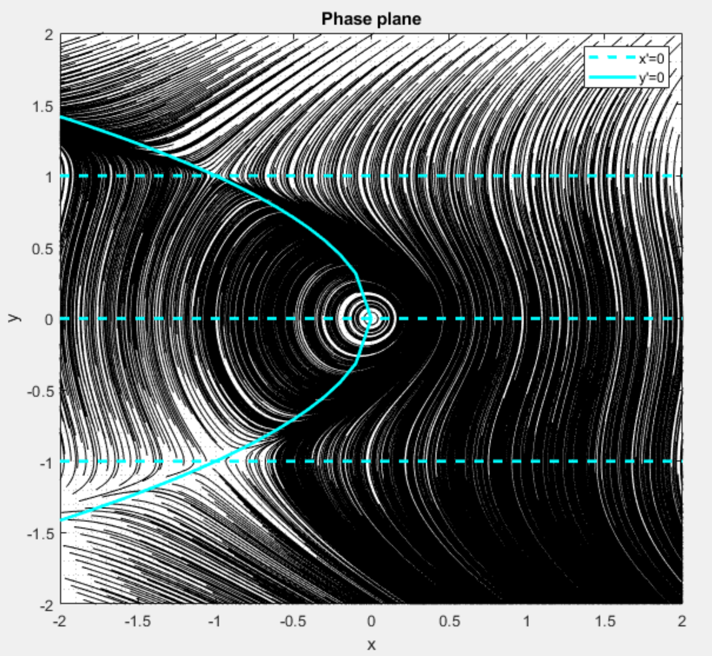
שאלה 1

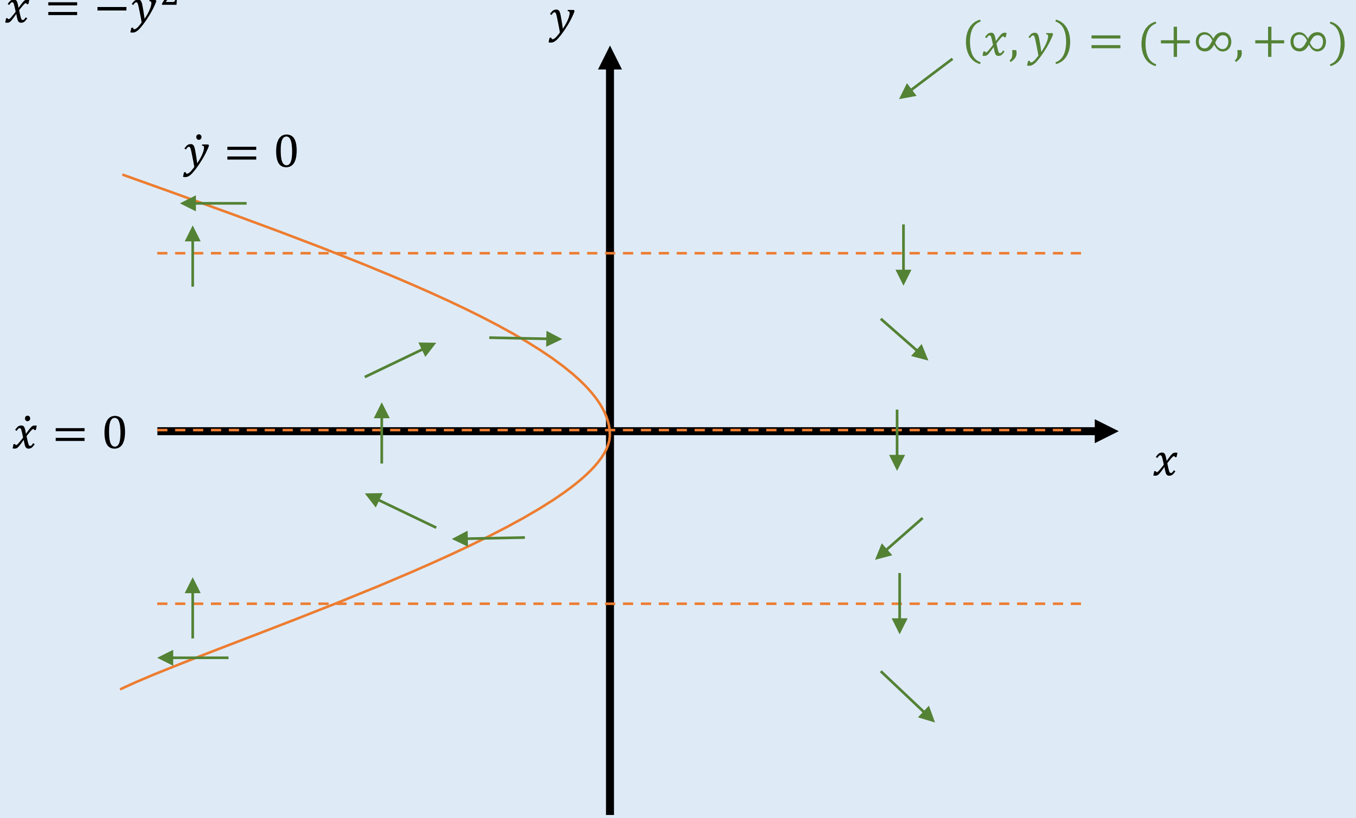
1. מהן נקודות השבת? מה יציבותן?
2. מהם עקומי האפס?
3. מה כיווני הזרימה שנצפה להם?

$$\dot{x} = y - y^3 \qquad \dot{y} = -x - y^2$$

$$\dot{x} = 0 \ \rightarrow \quad y(y-1)(y+1) = 0$$

$$\dot{y} = 0 \ \rightarrow \quad x = -y^2$$





נתונה המערכת הדינמית הבאה:

$$\dot{x} = f(x,y) = x \cdot (-x - y + 3)$$
$$\dot{y} = g(x,y) = y \cdot (-4y - 2x + 8)$$

1. כמה נקודות מתאימות להגדרת נקודות שבת?
2. מהו סכום ערכי ה-y של נקודות אלו?
3. כמה נקודות שבת יש מכל סוג?
4. מהו כיוון התנועה ההתחלתי של מסלול אשר מתחיל בנקודה $(1,1)$?

שאלה 2

1. כמה נקודות מתאימות להגדרת נקודות שבת?

נקודות שבת

$$\dot{x} = 0 = x \cdot (-x - y + 3) \rightarrow x = 0, x = -y + 3$$

$$\dot{y} = 0 = y \cdot (-4y - 2x + 8) \rightarrow y = 0, x = -2y + 4$$

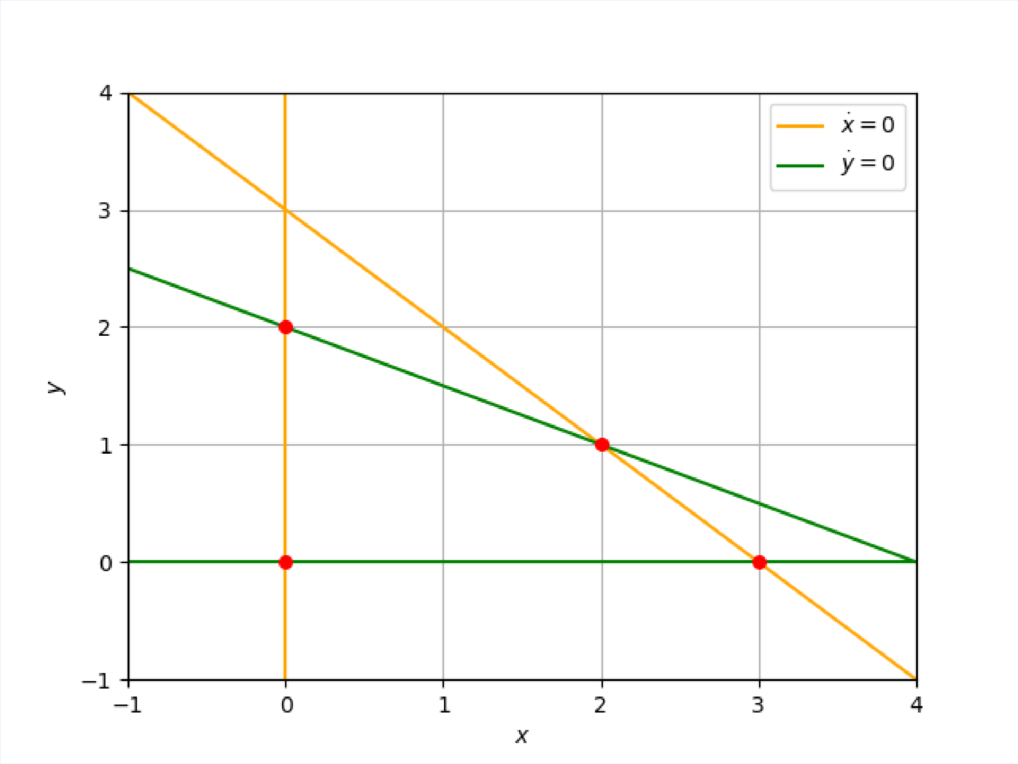
(1) $-y + 3 = -2y + 4 \rightarrow y = 1, x = 2$

(2) $y = 0 \rightarrow x = 3$

(3) $x = 0 \rightarrow -2y + 4 = 0 \rightarrow \text{y} = 2$

(4) $x = 0, y = 0$

$(0,0) \quad (0,2) \quad (3,0) \quad (2,1)$



שאלה 3

2. מהו סכום ערכי ה-y של נקודות אלו?

$(0,0)$ $(0,2)$ $(3,0)$ $(2,1)$

$$\sum y_i = 3$$

שאלה 4

3. כמה נקודות שבת יש מכל סוג?

$$\dot{x} = f(x,y) = x \cdot (-x - y + 3)$$
$$\dot{y} = g(x,y) = y \cdot (-4y - 2x + 8)$$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{dx} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{dx} & \frac{\partial g}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - y + 3 & -x \\ -2y & -8y - 2x + 8 \end{pmatrix}$$

$(0,0) \quad (0,2) \quad (3,0) \quad (2,1)$

$J(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = 3,8$ צומת לא יציבה

$J(0,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = 1,-8$ אוכף

$J(3,0) = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -3,2$ אוכף

$J(2,1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{5}$ צומת יציבה

כאשר המטריצה אלכסונית או משולשת הע"ע הם איברי האלכסון

כמה נקודות שבת יש מכל סוג?

יש לבחור תשובה אחת:

- 2 אוכף, 1 יציבה, 1 לא יציבה
- 3 יציבות, 1 לא יציבה, 2 אוכף
- 2 אוכף, 2 לא יציבה
- 6 לא יציבות
- 4 לא יציבות, 2 יציבות

שאלה 5

4. מהו כיוון התנועה ההתחלתי של מסלול אשר מתחיל בנקודה $(1,1)$?

$$\dot{x} = f(1,1) = 1 \cdot (-1 - 1 + 3) = 1$$
$$\dot{y} = g(1,1) = 1 \cdot (-4 - 2 + 8) = 2$$

מהו כיוון התנועה ההתחלתי של מסלול אשר מתחיל בנקודה (1,1)?

יש לבחור תשובה אחת:

- ימינה ולמעלה
- שמאלה ולמעלה
- ימינה ולמטה
- שמאלה ולמטה

שאלה 6

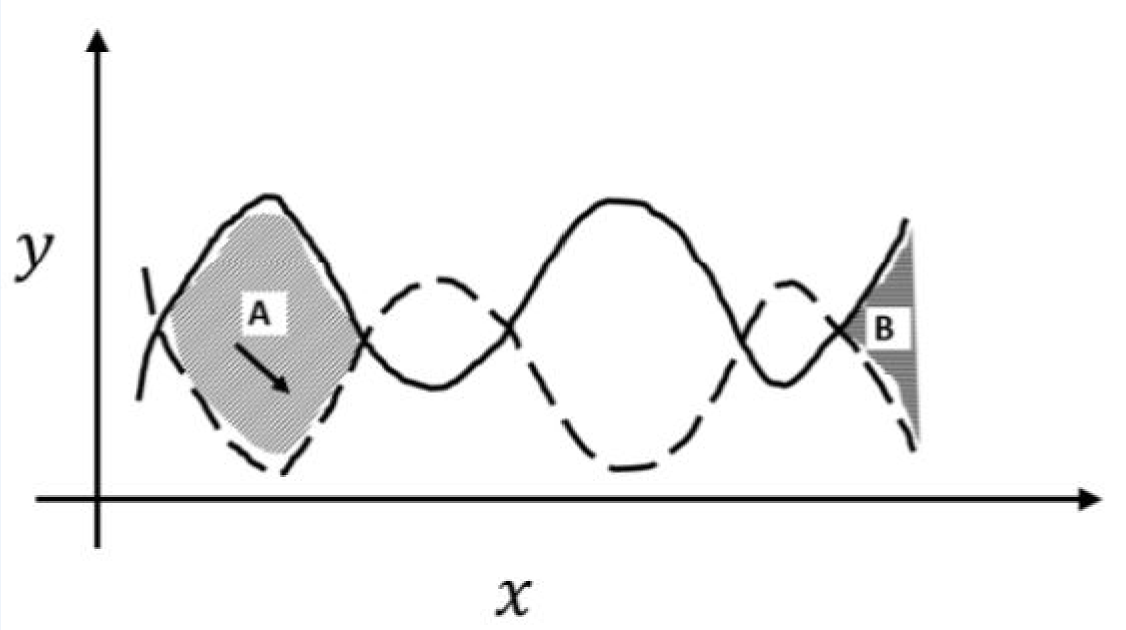
$$\frac{dx}{dt} = a_1 y - a_2 \sin x - a_3$$
$$\frac{dy}{dt} = b_1 y - b_2 \sin x - b_3$$

באיור שלפניכם מוצג מרחב הפאזה של מערכת דינמית דו מימדית.
כאשר a1, a2, a3, b1, b2, b3 הם קבועים כלשהם.

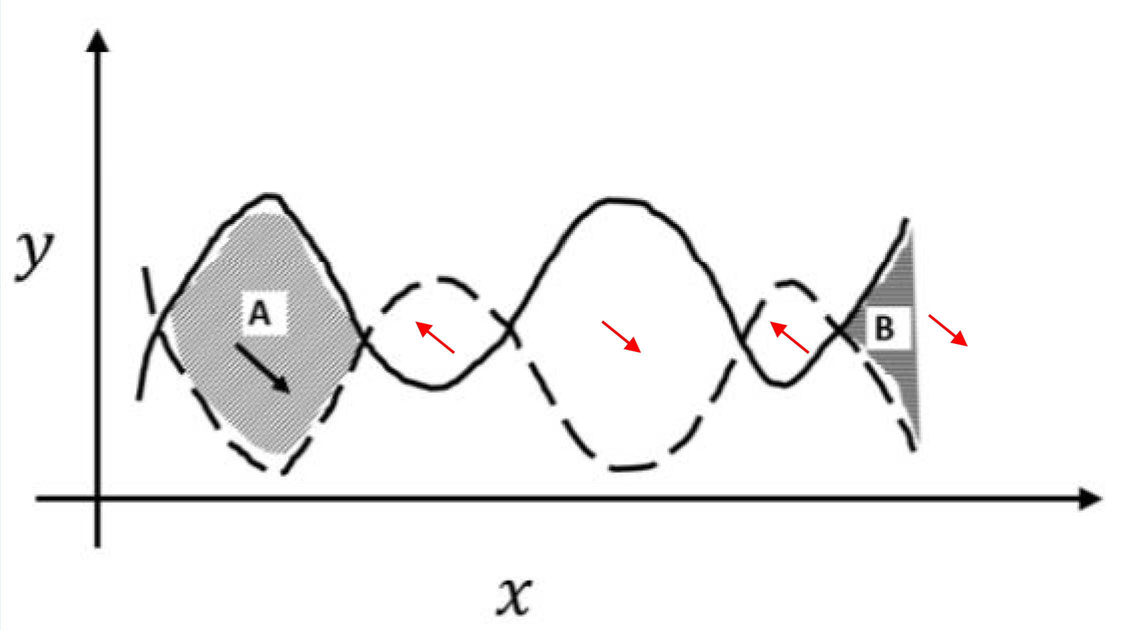
הקו הרצוף מייצג את עקום האפס של X (איפה שהנגזרת של X מתאפסת)

הקו המרוסק מייצג את עקום האפס של Y (איפה שהנגזרת של Y מתאפסת)

נתון כיוון הזרימה במרחב באזור A מה כיוון הזרימה באזור B?



שאלה 6



יש לבחור תשובה אחת:

- אין מספיק נתונים
- שמאלה ולמעלה
- שמאלה ולמטה
- ימינה ולמטה
- ימינה ולמעלה

שאלה נוספת

עברתם בכיתה בתחילת הסמסטר על מודל SIR, מודל אפידמיולוגי אשר מתאר אנטראקציה בין S - "חשופים", I – "נגועים" ו-R-"מורחקים" בהקשר של התפרצות מחלות מדבקות.

לשם פשטות נניח עבור תרגיל זה כי $R = N - I - S$ כאשר N מיצג את גודל האוכלוסייה. מערכת המשוואות (הלא לינארית) אשר מתארת את הבעייה, נתונה כדלהלן:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma(N - S - I)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \nu I$$

שימו לב כי כל הפרמטרים חיוביים.
לשם פשטות הניחו כי $\beta = \gamma = 1, N - v > 0$

שאלה נוספת

$$\dot{S} = -SI + N - S - I$$

$$\dot{I} = SI - vI$$

עקומי אפס

$$\dot{S} = 0 \rightarrow \mathrm{I} = \frac{-S + N}{S + 1}$$

$$\dot{I} = 0 \rightarrow I(S - v) = 0, \qquad I = 0;\ S = v$$

$$(N, 0), \left(v, \frac{N - v}{1 + v}\right) = (v, a > 0)$$

$$N - v > 0$$

יש לבחור תשובה אחת:

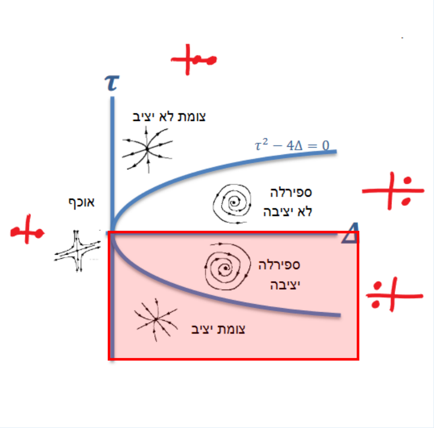
- ספירלה לא יציבה וצומת יציב.
- אוכף ונקודת שבת יציבה.
- צומת לא יציב ונקודת שבת יציבה.
- צומת לא יציב וספירלה יציבה.

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{dS} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{dS} & \frac{\partial g}{dI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I - 1 & -S - 1 \\ I & S - v \end{pmatrix}$$

כאשר המטריצה אלכסונית או משולשת הע"ע הם איברי האלכסון

$J(N, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -N - 1 \\ 0 & N - v \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -1, N - v > 0 \rightarrow$ אוכף

$J(v, a) = \begin{pmatrix} -a - 1 & -v - 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \tau = -a - 1 < 0, \Delta = a(v + 1) > 0 \rightarrow$ יציב



שאלה 7

עברתם בכיתה בתחילת הסמסטר על מודל SIR, מודל אפידמיולוגי אשר מתאר אנטראקציה בין S - "חשופים", I – "נגועים" ו-R-"מורחקים" בהקשר של התפרצות מחלות מדבקות.

לשם פשטות נניח עבור תרגיל זה כי $R = N - I - S$ כאשר N מיצג את גודל האוכלוסייה. מערכת המשוואות (הלא לינארית) אשר מתארת את הבעייה, נתונה כדלהלן:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma(N - S - I)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \nu I$$

שימו לב כי כל הפרמטרים חיוביים.

לשם פשטות הניחו כי $N = 2, \beta = 1, \gamma = 1, \nu = 1$

שאלה 7

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma(N - S - I)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \nu I$$

$N = 2, \beta = 1, \gamma = 1, \nu = 1$

עקומי אפס

$\dot{S} = -SI - 2I + 2 - S \qquad \dot{S} = 0 \rightarrow S = \frac{-I + 2}{I + 1}$

$\dot{I} = SI - I \qquad \dot{I} = 0 \rightarrow I(S - 1) = 0$

$(2, 0), (1, 0.5)$

יש לבחור תשובה אחת:

- ספירלה לא יציבה וצומת יציב.
- אוכף ונקודת שבת יציבה.
- צומת לא יציב ונקודת שבת יציבה.
- צומת לא יציב וספירלה יציבה.

$$J(S,I) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{dS} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{dS} & \frac{\partial g}{dI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I - 1 & -S - 2 \\ I & S - 1 \end{pmatrix}$$

$$J(2,0) = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -1, 1$$

$$J(1,0.5) = \begin{pmatrix} -1.5 & -3 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 6}\right) = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} i$$

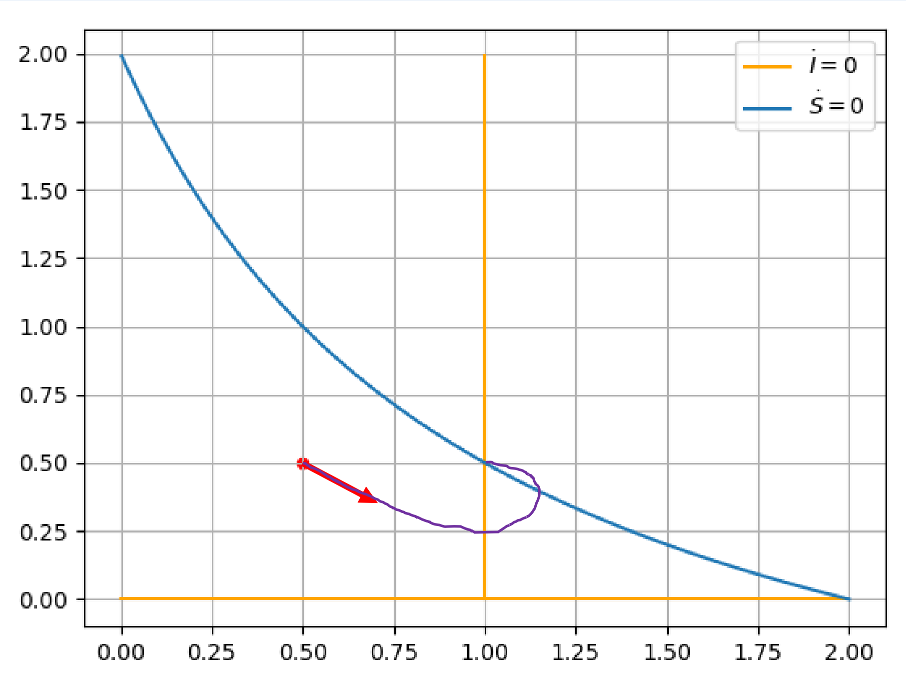
שאלה 8

עקומי אפס $\dot{S} = 0 \quad \rightarrow \quad S = \frac{-I+2}{I+1}$ $\qquad \dot{I} = 0 \quad \rightarrow \quad I = 0, \qquad S = 1$

נקודות שבת $(2,0),(1,0.5)$

לצורך פשטות הניחו כי $v = 1$, $\gamma = 1$, $\beta = 1$, $N = 2$, מה יקרה למערכת עבור תנאי ההתחלה $(0.5,0.5)$?

I



S