הפרדת קבועי זמן

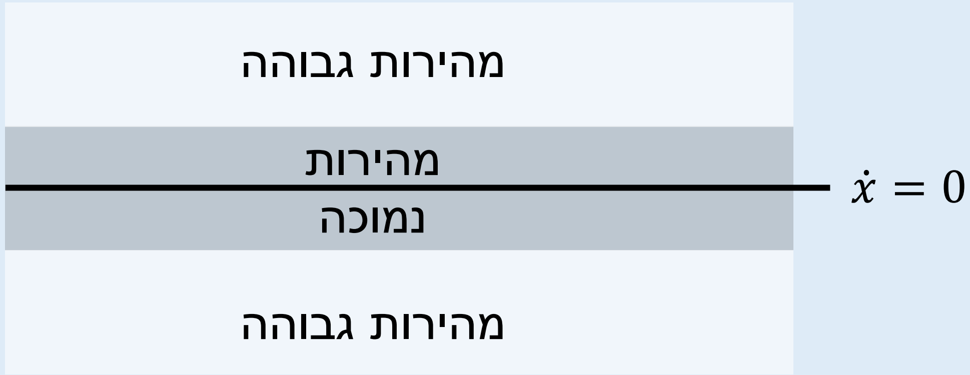
הסבר קצר

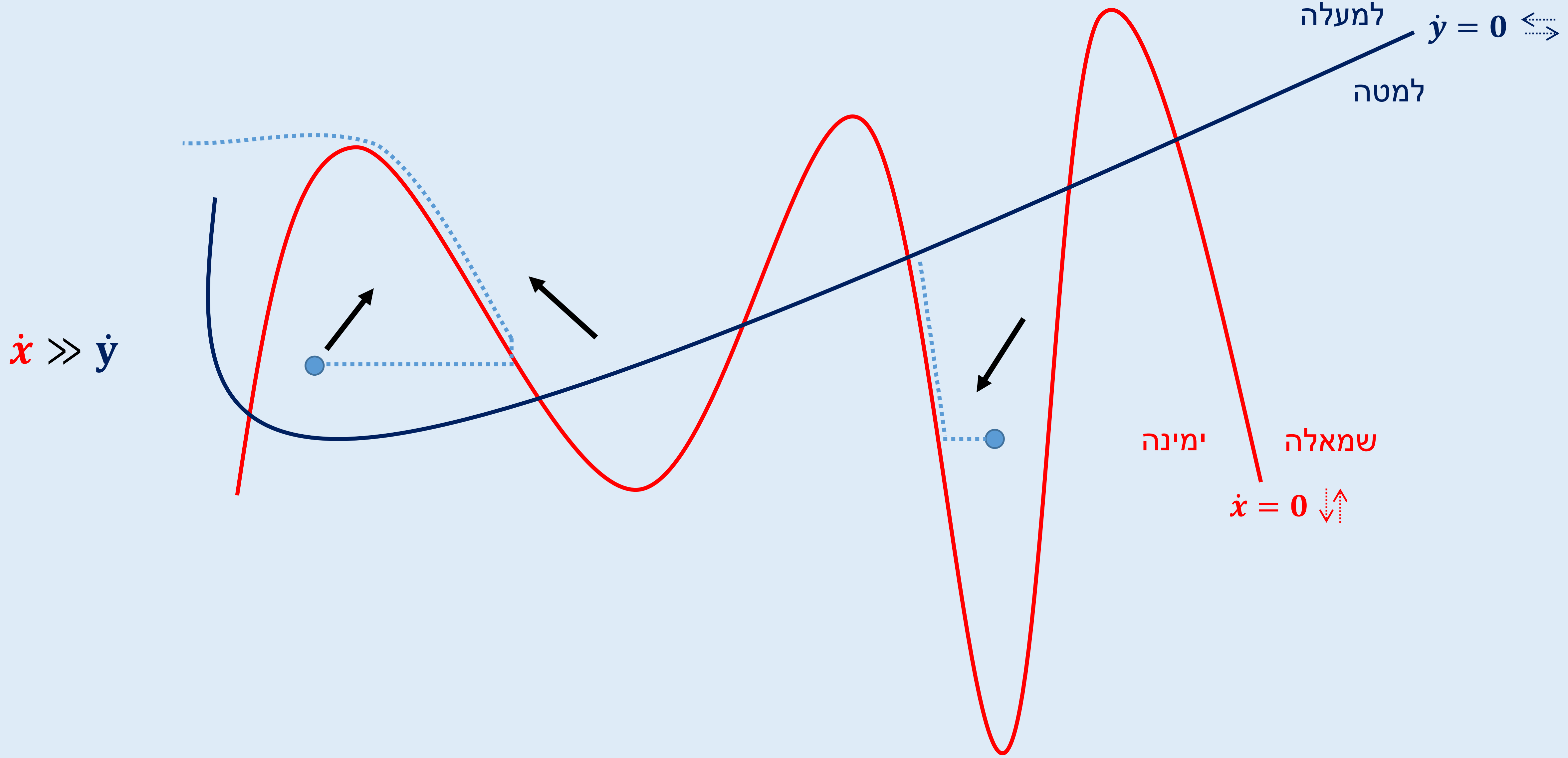
$\dot{x}$ ו- $\dot{y}$ הם בעצם המהירות של x ו-y – או השינוי ב-x ו-y.

נניח לרגע ש-$\dot{x}$ הוא המשתנה המהיר שלנו

יש לנו שני סוגי התנהגויות:

1. רחוק מעקומי האפס – המהירות היא "רגילה" (לפי המשתנה המהיר)
2. קרוב לעקום האפס של המשתנה האיטי מתנהגים כרגיל – המשתנה האיטי עדיין איטי והמשתנה המהיר עדיין מהיר
3. קרוב לעקום האפס של המשתנה המהיר השינוי במשתנה המהיר קרוב לאפס (כלומר המהירות קטנה מאוד) ולכן המשתנה המהיר יתנהג בקירוב כמו המשתנה האיטי ("זחילה")



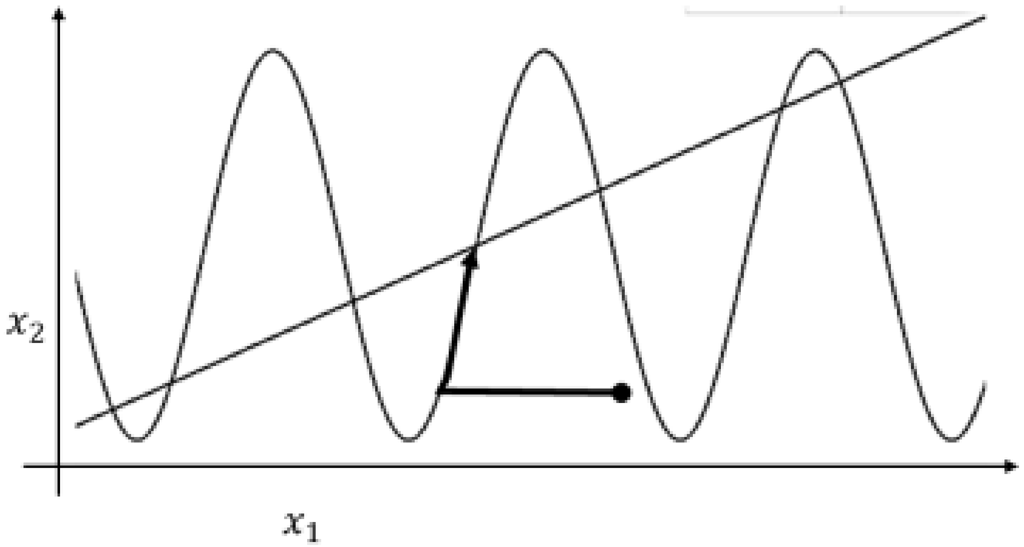


למעלה
$\dot{y} = 0$
למטה
$\dot{x} \gg \dot{y}$
ימינה
שמאלה
$\dot{x} = 0$

שאלה 1

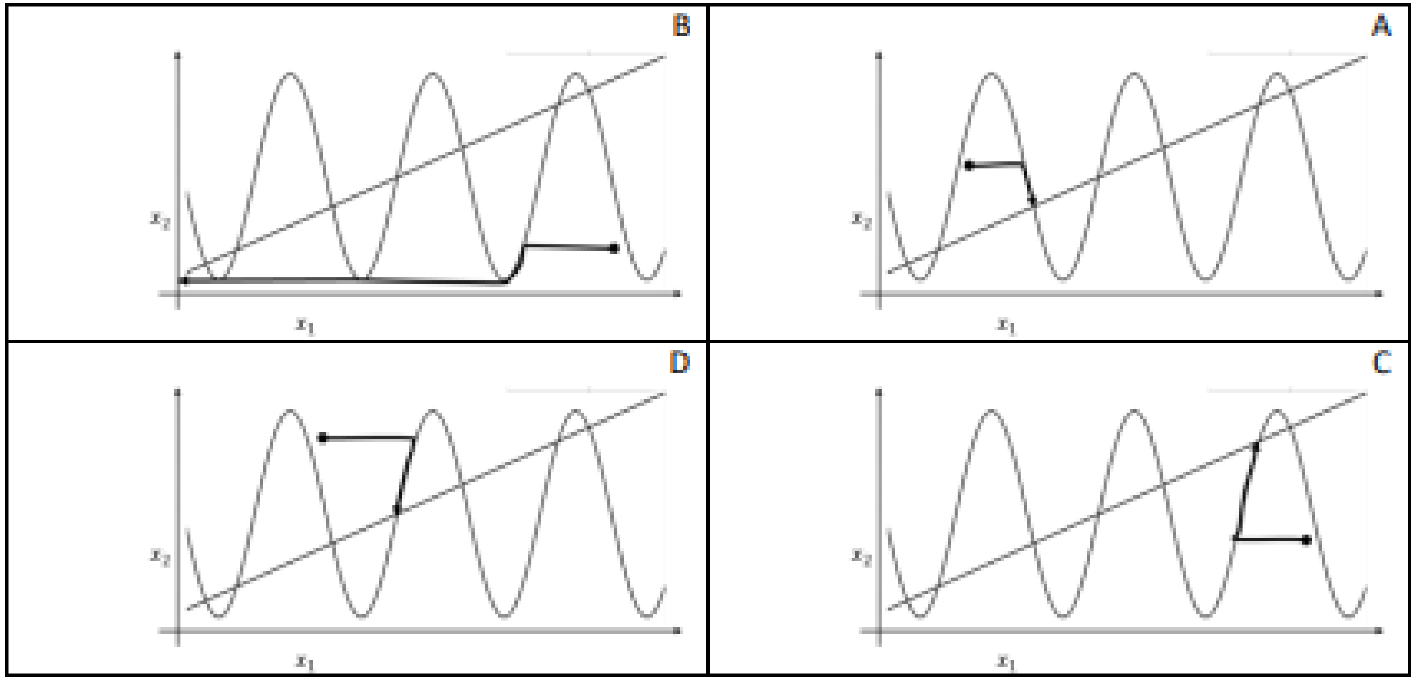
נתון שבמערכת הבאה מתקיימת הפרדת זמנים: השינוי במשתנה *x1* **מהיר הרבה יותר** מהשינוי במשתנה *x2*.
באיור מוצגים עקומי אפס של *x1* (הקו הסינוסואידלי) ושל *x2* (הקו הליניארי).

נתון מסלול אחד במרחב הפאזה:



מבין ארבעת המסלולים המוצגים באיורים A-D, אילו מסלולים אפשריים?

<u>הערה: בכל המסלולים התנועה היא בכיוון האופקי ולאורך הקו הסינוסואידלי בלבד.</u>

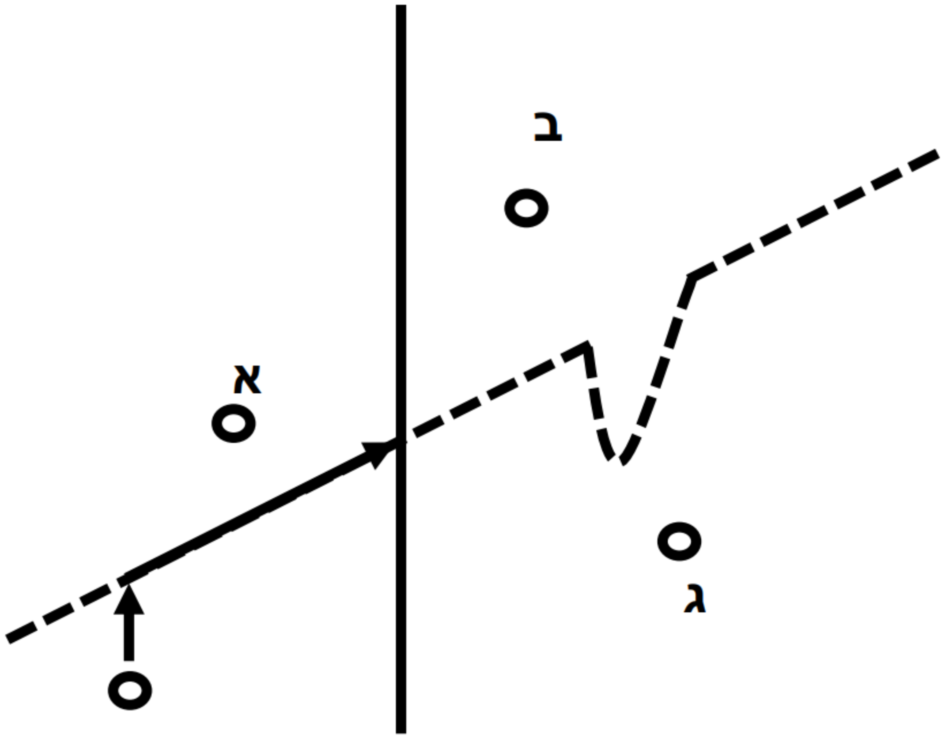


שאלה 2

במערכת שלפניכם, נתון:

- מתקיימת הפרדת זמנים, כך שהמשתנה האנכי מהיר בהרבה מהמשתנה האופקי.
- הקו הרצוף הוא הנולקלינה של המשתנה האיטי, והקו המרוסק הוא נולקלינה של המשתנה המהיר.
- נתון מסלול התנועה של המערכת מנקודת התחלה אחת ועד לנקודת השבת שבמפגש הנולקלינות.

קבעו עבור אילו מתנאי התחלה האחרים המסומנים באיור המערכת תגיע בסופו של דבר לנקודת השבת הזו.



שאלה 3

נניח מערכת:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{x^3}{3} - y$$
$$\frac{dy}{dt} = -10^{-9}y$$

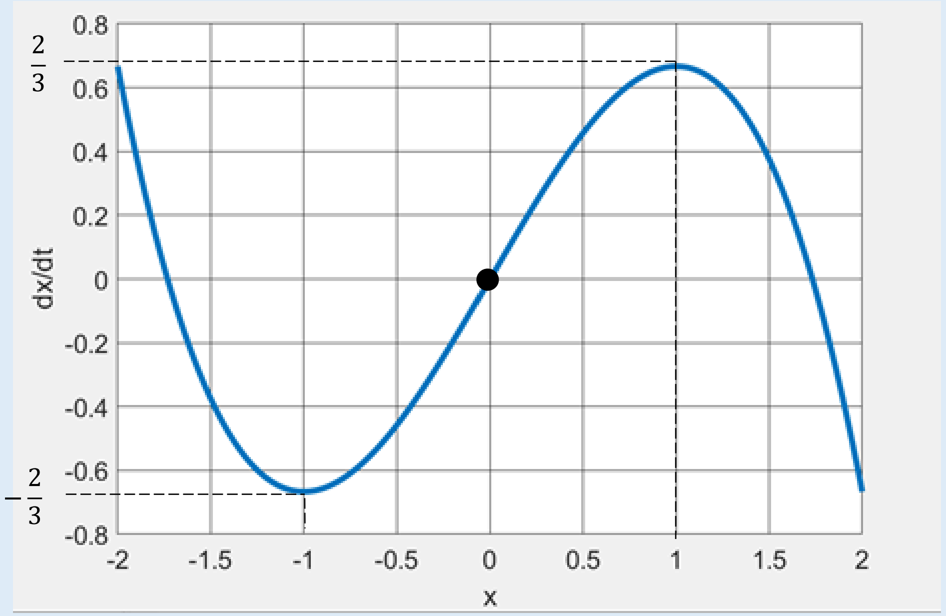
נניח תנאי התחלה מהצורה

$$(x, y) = (1, a)$$

ציירו את עקומי האפס ואת כווני הזרימה במערכת, והעריכו מהו הערך המירבי של a שעבורו מתכנסת מערכת לנקודת שווי משקל.

נא לדייק שתי ספרות אחרי הנקודה.

מההרצאה: $x - \frac{x^3}{3}$



שאלה 4

כעת נבצע שינוי קטן במודל האיפדמיולוגי SIR:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma(N - S - I)$$

$$\frac{dI}{dt} = \epsilon(\beta SI - vI)$$

$$\epsilon \ll 1$$

נתון כי $\gamma, \beta, N, v > 0$

תזכורת:

S – "חשופים" (Susceptible). אנשים בריאים, באים במגע עם "נגועים" ועשויים להידבק.

I – "נגועים" (Infected). אלה שנדבקו, אבל סימני המחלה טרם הופיעו והם ממשיכים להסתובב בחברה ולהדביק עוד אנשים.

R – "מורחקים" (Removed). חולים הנמנעים ממגע עם קבוצת ה"חשופים", כדי למנוע הדבקה והמשך הפצת המחלה.

[רעננו את הזיכרון – מה מייצג כל איבר במשוואות?]

איך השינוי ישפיע על הדינמיקה?

יש לבחור תשובה אחת:

- אפשרויות התנועה במרחב הפאזה: במקביל לציר S או לאורך נוקלינת I
- אפשרויות התנועה במרחב הפאזה: במקביל לציר I או לאורך נוקלינת I
- אפשרויות התנועה במרחב הפאזה: במקביל לציר S או לאורך נוקלינת S
- כעת S הוא משתנה "איטי" ו- I משתנה "מהיר"

שאלה 5

כעת נבצע שינוי קטן במודל האיפדמיולוגי SIR:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma(N - S - I)$$

$$\frac{dI}{dt} = \epsilon(\beta SI - vI)$$

$$\epsilon \ll 1$$

נתון כי $\gamma, \beta, N, v > 0$

תזכורת:

S – "חשופים" (Susceptible). אנשים בריאים, באים במגע עם "נגועים" ועשויים להידבק.

I – "נגועים" (Infected). אלה שנדבקו, אבל סימני המחלה טרם הופיעו והם ממשיכים להסתובב בחברה ולהדביק עוד אנשים.

R – "מורחקים" (Removed). חולים הנמנעים ממגע עם קבוצת ה"חשופים", כדי למנוע הדבקה והמשך הפצת המחלה.

[רעננו את הזיכרון – מה מייצג כל איבר במשוואות?]

נניח כעת שהמערכת נמצאת בנקודת השבת היציבה, ושהתפרצות של המחלה מתבטאת בקפיצה פתאומית בערך של I.
איך יראה המסלול של חזרת המערכת לנקודת השבת אחרי התפרצות?

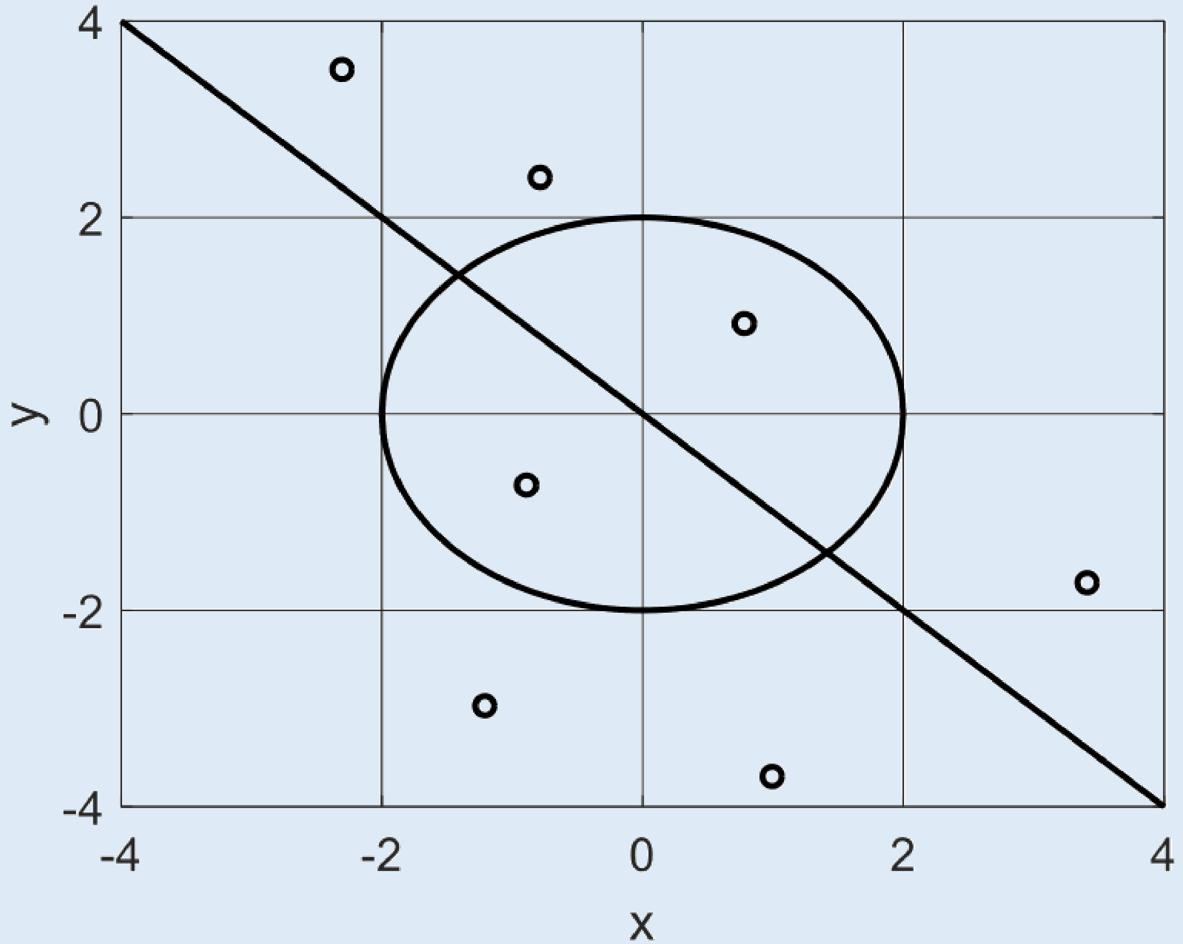
יש לבחור תשובה אחת:

- מספר הבריאים יקטן במהירות ואז יחזור במהירות למצב היציב
- מספר הבריאים ירד במהירות ואז יחזור לאט למצב היציב
- מספר הבריאים יגדל במהירות ואז יחזור לאט למצב היציב
- מספר הבריאים יגדל לאט ואז יחזור במהירות למצב היציב

שאלה 6 - שאלה פתוחה – מועד ב' 2017

נתונה המערכת הבאה:

$$\frac{dx}{dt} = 4 - x^2 - y^2$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.001(x + y)$$



איזה משפט מהבאים נכון?

יש לבחור תשובה אחת:

- הערך של x ישאף למינוס אינסוף עבור חלק מהנקודות
- הערך של y ישאף למינוס אינסוף עבור כל הנקודות.
- הערך של y ישאף למינוס אינסוף עבור חלק מהנקודות
- הערך של x ישאף למינוס אינסוף עבור כל הנקודות